Forståelsesprofiler hos elever i Matematikk R2

En studie av forståelsen av derivasjon

Torstein Hermansen

Mastergradsoppgave i Realfagdidaktikk (RDID4190)

Institutt for lærerutdanning og skoleforskning
Det utdanningsvitenskaplige fakultet

UNIVERSITETET I OSLO

Våren 2015

Forståelsesprofiler hos elever i Matematikk R2

En studie av forståelsen av derivasjon

År: 2015

Forståelsesprofiler hos elever i Matematikk R2

Torstein Hermansen

http://www.duo.uio.no

Trykk: Reprosentralen, Universitetet i Oslo

Sammendrag

Temaet i denne mastergradsoppgaven er forståelsesprofiler i derivasjon hos elever i R2. Forskningsspørsmålene har vært å se nærmere på ulike forståelsesprofiler og å se om elever med liten grad av relasjonell forståelse har mulighet for å få gode karakterer. Modellen for forståelsesprofil består av grad av relasjonell forståelse og ferdigheter i tre komponenter. De tre komponentene er «derivasjon og geometri», «derivasjon og algebra» og «algebra og geometri».

Det teoretiske bakteppet for oppgaven er konstruktivistisk læringsteori, diagnostisk undervisning, relasjonell forståelse, instrumentell forståelse og definisjon, tolkning og anvendelser av den deriverte. Rammeverket er det samme som blir brukt i TIMSS Advanced 2008. For å få svar på forskningsspørsmålene er det hensiktsmessig med en kvalitativ tilnærming. Ved kognitive intervju kan man komme inn i elevens verden, og man kan få et innblikk i forståelsen eleven sitter med. Studien har en liten kvantitativ del først, en test med 10 forskjellige spørsmål som kan relateres til derivasjon. Det var 28 elever som tok testen, og etter den ble fem av disse plukket ut til intervju. Testen elevene hadde tatt ble utgangspunkt for kognitive intervju om oppgavene. Elevene ble spurt hvordan de tenkte da de løste oppgavene på testen, hvordan de gjorde det og hvorfor de kan gjøre det.

Resultatene fra intervjuene blir mest vektlagt, og skåren på testen blir kort kommentert. Elevene vet hvordan de skal løse standard regneoppgaver, men synes forklaringsoppgaver er vanskeligere. Tre av de fem elevene vet hvorfor vi deriverer for å finne ekstremalpunkter, mens de to siste hadde lært en oppskrift fra boka og visste ikke hvorfor det er slik.

Hovedfunnet i studien er de ulike forståelsesprofilene de intervjuede elevene representerer. En av elevene viser relasjonell forståelse i matematikk, men blir satt tilbake på grunn av manglende algebraferdigheter. Hun får god karakter, men kunne fått enda bedre med økt fokus på algebra. På den andre siden har vi en elev som har instrumentell forståelse. Han får god karakter i matematikk ved å pugge oppskrifter og at han er god i algebra. Et siste funn er at elevene som blir intervjuet har vanskelig for å utrykke seg muntlig. Om elever blir mer muntlig aktive i matematikkundervisningen kan være med på å øke forståelsen i faget.

Forord

Denne mastergradsoppgaven skrives som en del av Lektorprogrammet ved Universitetet i Oslo. Oppgavens omfang er 30 studiepoeng, og skrives det siste semesteret på programmet. Det har vært en utrolig spennende prosess å jobbe med mastergradsoppgaven og er en fin avslutning på fem lærerike og interessante år på Blindern.

Det er mange som skal takkes i en slik stund. Først og fremst takk til skolene og elevene som var villig til å være med i studien. En ekstra takk til de fem elevene som var med på intervju. I tillegg har jeg hatt to engasjerte og dyktige veiledere i Arne Hole og Helmer Aslaksen. Takk for konstruktive innspill og gode veiledningssamtaler.

Jeg vil også sende en takk til familien min. Til mamma og pappa for støtte og korrekturlesing. Og til sist, men ikke minst, min kjære Ida som står ved min side. Takk for oppmuntring og at du er den du er!

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

I dette kapitlet skal jeg presentere bakgrunnen for forskningen, forskningsspørsmålene som blir stilt og oppbygningen av oppgaven.

1.1 Bakgrunn

Da jeg selv var elev ved videregående skole valgte jeg full fordypning i realfagene matematikk, fysikk og kjemi. Jeg fikk gode karakterer, men jeg har i min tid på universitetet reflektert over hvilken forståelse av de ulike matematiske begrepene jeg hadde den gangen. Når det gjelder derivasjon har jeg i ettertid erkjent at jeg ikke alltid forstod hva jeg gjorde, men jeg visste hva jeg skulle gjøre. Jeg kunne reglene for å derivere sammensatte funksjoner, tegne fortegnslinjer og finne ekstremalpunkter, men noen dypere refleksjon rundt hvorfor jeg gjorde det tror jeg ikke fant sted.

I dag møter elevene som velger teoretisk matematikk begrepet derivasjon allerede i første klassetrinn i videregående skole. I realfagsmatematikk (R-matematikk) og samfunnsfaglig matematikk (S-matematikk) blir elevene enda bedre kjent med den deriverte (Utdanningsdirektoratet, 2015). I løpet av tre år med derivasjon vil derfor tro at de som velger realfagsmatematikk har alle tiders muligheter til å utvikle forståelse av hva derivasjon dreier seg om.

Med jevne mellomrom får vi en pekepinn om hvordan det står til med kunnskapen i norsk skole. Resultatene fra studiene Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) og Programme for International Student Assessment (PISA) har de siste årene slått fast at norske elever skårer relativt lavt på matematikkoppgaver sammenliknet med andre land som har et sammenliknbart ressursgrunnlag. I rapportene fra TIMSS Advanced ser vi at derivasjonsoppgavene ikke er noe unntak. Rapporten fra 2008 (Grønmo, et al., 2010) viser også at det er færre med rett svar på derivasjonsoppgavene i 2008 sammenliknet med elevene i studien fra 1998. En tidligere mastergradsoppgave (Leiren & Ludvigsen, 2005) har sammenliknet norske og finske videregående elevers kompetanse i derivasjon, og har data på at «Elevene gjør det dårligere på mer teoretiske sider ved derivasjon, men gjør det bedre på en del av de praktiske oppgavene.» Det er behov for mer forskning på feltet.

1.2 Forskningsspørsmål

I mitt masterprosjekt ønsker jeg å se nærmere på elevers forståelse av derivasjon. En hypotese jeg har er at man i norsk skole i dag ikke trenger relasjonell forståelse (se delkapittel 2.3) for å få gode karakterer, men at man kun trenger å lære seg algoritmer for å løse oppgaver. Jeg tror det fokuseres mest på å kunne løse oppgaver, og ikke så mye på forståelse av hva det er man gjør og hvorfor. Jeg tror heller ikke det er noen absolutt sammenheng mellom karakterer og relasjonell forståelse, da jeg tror de fleste vurderingssituasjonene måler instrumentell forståelse. Med andre ord tror jeg ikke det er slik at elever med relasjonell forståelse får gode karakterer og elever med instrumentell forståelse får svakere karakterer. Jeg ønsker også å se nærmere på enkelte elever og danne meg et bilde av deres forståelsesprofil.

Jeg håper lærere i norsk skole vil ha nytte av å lese min mastergradsoppgave, og jeg har tilpasset fremstillingen til denne målgruppen. En lærer bør reflektere over måten han/hun underviser, og om undervisningsoppleggene fremmer instrumentell eller relasjonell forståelse. Oppgaven kan også være et bidrag i en diskusjon om vi ønsker undervisning som fremmer relasjonell forståelse.

Mine problemstillinger dreier seg om spørsmålene: «*Hvilke forståelsesprofiler i derivasjon har elevene?*» og «*Trengs det god relasjonell forståelse i matematikk for å få god karakter i Matematikk R2?*».

1.3 Metodisk tilnærming

For å få svar på elevers forståelse må jeg komme inn i elevenes tanker. For å få til dette mener jeg en kvalitativ tilnærming er mest hensiktsmessig. I følge Kvale og Brinkmann (2009) vil det kvalitative intervjuet være en god tilnærming for å komme inn i intervjupersonens verden. Jeg har valgt å gi 28 elever en test på 10 oppgaver som kan relateres til derivasjon. Dette for å danne meg et innblikk i elevenes forståelse, og for å kunne plukke ut 5 kandidater til intervju. I intervjusituasjonen snakket jeg med elevene om de ulike oppgavene, og hvordan de tenkte da de løste dem. Fra datainnsamlingen fikk jeg gode data som jeg kunne bruke til å svare på forskningsspørsmålene.

1.4 Oppgavens struktur

Kapittel 2 er et teorikapittel der jeg presenterer det teoretiske grunnlaget for analysen. Det er konstruktivisme, diagnostisk undervisning, instrumentell og relasjonell forståelse, derivasjon og rammeverk for oppgaven.

I det tredje kapitlet blir det redegjort for den metodiske tilnærmingen, hvilke utvalgskriterier som ligger til grunn og hvordan datainnsamlingen har foregått. Deretter blir etiske sider ved studien og validiteten diskutert.

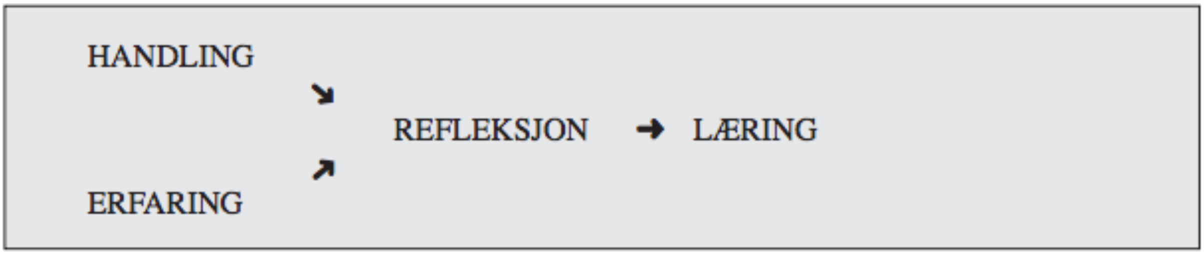
I kapittel 4 blir resultatene fra testen og intervjuene presentert. Dette blir gjort oppgave for oppgave hvor jeg først kommenterer oppgaven, presenterer svarfordelingen, kommenterer svarfordelingen og viser til resultater fra intervjuene.

Det siste kapitlet heter forståelsesprofiler. Der presenterer jeg tre av de fem elevene og gir et bilde av den matematiske forståelsen eleven har. De to siste elevenes forståelsesprofiler blir gjennomgått mindre omfattende. Til slutt i kapitlet vil jeg summere opp hvilke funn jeg har gjort og svar på forskningsspørsmålene.

2 Teori

2.1 Konstruktivisme

Konstruktivistisk læringsteori er en teori om hva kunnskap er og hvordan vi lærer. Den bygger på at individet konstruerer sin egen subjektive kunnskap. Kunnskapen blir ikke presset på fra en ytre stimuleringskilde, men individet må selv velge ut, tolke og tilpasse stimuleringen til sitt eget system (Imsen, 2008). Kunnskapen sitter i hvert menneskes hode. Vi deler konstruktivisme i kognitiv konstruktivisme og sosial konstruktivisme. I kognitiv konstruktivisme, som vi finner hos Piaget, er det mest fokus på hva som skjer i hodet til den som lærer. Læringen blir dermed individuell. I sosial konstruktivisme, hvor Vygotsky er en bidragsyter, legges det vekt på at kunnskap skapes sosialt, først og fremst gjennom språket (Imsen, 2008).



Figur 1: Konstruktivisme (Brekke, 2010).

I Figur 1 kan vi se en modell for konstruktivismen. Der mennesket kan gjøre refleksjoner ut fra handlinger og erfaringer, og dette fører til læring (Brekke, 2010). I følge Piaget organiserer menneskene tankeprosesser i kognitive strukturer, i såkalte skjema. Skjemaene inneholder erfaringer og kunnskap. Ny kunnskap (læring) kan konstrueres inn i byggverket på to forskjellige måter. Enten kan det gjøres gjennom assimilasjon, hvor ny informasjon tolkes ut ifra skjemaene som allerede eksisterer, og man utvider skjemaet. Skjemaene som eksisterer kan på en annen side komme i ubalanse med de nye erfaringene og det oppstår en kognitiv konflikt. De eksisterende skjemaene må modifiseres og/eller det må lages nye skjema for å oppnå balanse, denne læringsprosessen kalles akkomodasjon (Lyngsnes & Rismark, 1999).

2.2 Diagnostisk undervisning

Som konsekvens på et konstruktivistisk syn på læring er det visse forhold vi som lærere må være bevisste på i undervisningen. Det er viktig at man i undervisningen legger til rette for aktiviteter der elevene kan vinne erfaringer som de kan bygge kunnskap på og gi dem anledning til å stoppe opp og reflektere over det arbeidet de har utført (Brekke, 2010). At dette ligger til grunn for valg av arbeidsmåter i skolen, er et av kravene til det vi kaller diagnostisk undervisning. Forskning viser, fra blant annet Reflection: A Diagnostic Teaching Experiment (Birks, 1987), at diagnostisk undervisning gir økt langtidslæring.

Diagnostisering er et kjent begrep fra medisinen. Det brukes når det er snakk om å bestemme hvilken sykdom pasienten har og også årsaken til sykdommen. I pedagogikken kan vi overføre dette til å finne fram til elevens kunnskap i faget, og prøve å finne årsaker til elevens fagvansker (Melbye, 1995). I opplæringen gjøres det erfaringer innenfor avgrensede felt om et begrep. Et eksempel kan være at barn i barneskolen ser at ved multiplikasjon får man *alltid* et større tall, og tror at det gjelder generelt. Slike ufullstendige tanker knyttet til et begrep kalles misoppfatninger (Brekke, 2010). Det er forskjell på å gjøre feil og å ha en misoppfatning. En feil gjøres mer eller mindre tilfeldig. Når det gjøres en feil hvor det ligger en bestemt tenkning bak, ofte som resultat av overgeneralisering som ikke gjelder, kaller vi det misoppfatning. Læreren bør prøve å identifisere slike misoppfatninger hos elevene, og la de erfare eksempler hvor dette ikke stemmer. Får de tid til refleksjon rundt dette vil det kunne foregå en akkomodasjonsprosess i de kognitive skjemaene.

For å beskrive elevers forståelse av matematikk kan vi også benytte oss av begrepene begrepsdefinisjon og begrepsbilde. Det som menes med begrepsdefinisjon er hva som er den felles aksepterte definisjonen av et begrep. Men hva som legges i et begrep kan variere fra individ til individ, og hvert individ har et eget begrepsbilde. Å kunne gjengi definisjonen av et begrep er ikke nødvendigvis det samme som å forstå begrepet (Tall & Vinner, 1981). Begrepsdefinisjonen av et rektangel er en firkant hvor alle vinklene er rette. En elev kan ha et begrepsbilde som sier at i tillegg til rett vinkler må sidene være parvis like store, og at det må være to ulike sidelengder. Dette er en klassisk misoppfatning hvor begrepsbildet ikke stemmer overens med begrepsdefinisjonen. Vi vet at et kvadrat også er et rektangel.

2.3 Instrumentell og relasjonell forståelse

Det finnes flere som har skrevet om instrumentell og relasjonell forståelse. Ragnar Solvang (1986) har skrevet en bok i matematikkdidaktikk der han tar for seg disse begrepene. Kort fortalt har eleven instrumentell forståelse hvis han/hun forstår hva man må gjøre for å få riktig svar på en oppgave - hvordan man gjør det. Relasjonell forståelse går på om eleven setter kunnskapen inn i et større bilde og ser sammenhenger. Ikke bare hvordan man kommer fram til rett svar, men også hvorfor det er slik.

Skemp (1987) skriver at instrumentell forståelse er «rules without reasons». Og man kan da spørre seg om hvorvidt instrumentell forståelse er *forståelse* eller ikke. Det kan virke meningsløst og umotiverende for personer å gjøre noe uten å vite hva man gjør. Å følge en oppskrift er ikke noe hokuspokus, og jobben kunne like gjerne blitt utført at roboter. Men er instrumentell forståelse unyttig? Det viser seg at instrumentell forståelse også kan være bra. For noen elever som ikke forstår «noe», kan enkle regneoppgaver hvor de lærer seg enkle algoritmer gi dem mestringsfølelse og motivasjon til å jobbe videre med matematikk. Og de kan senere utvikle relasjonell forståelse.

2.4 Den deriverte

Denne oppgaven spinner temamessig rundt forståelsen av den deriverte, og da tenkes det i hovedsak på begrepet den deriverte og hva den deriverte kan brukes til. Vi skal gå nærmere inn på definisjonen til den deriverte og se på grafisk tolkning av den deriverte.

2.4.1 Definisjonen

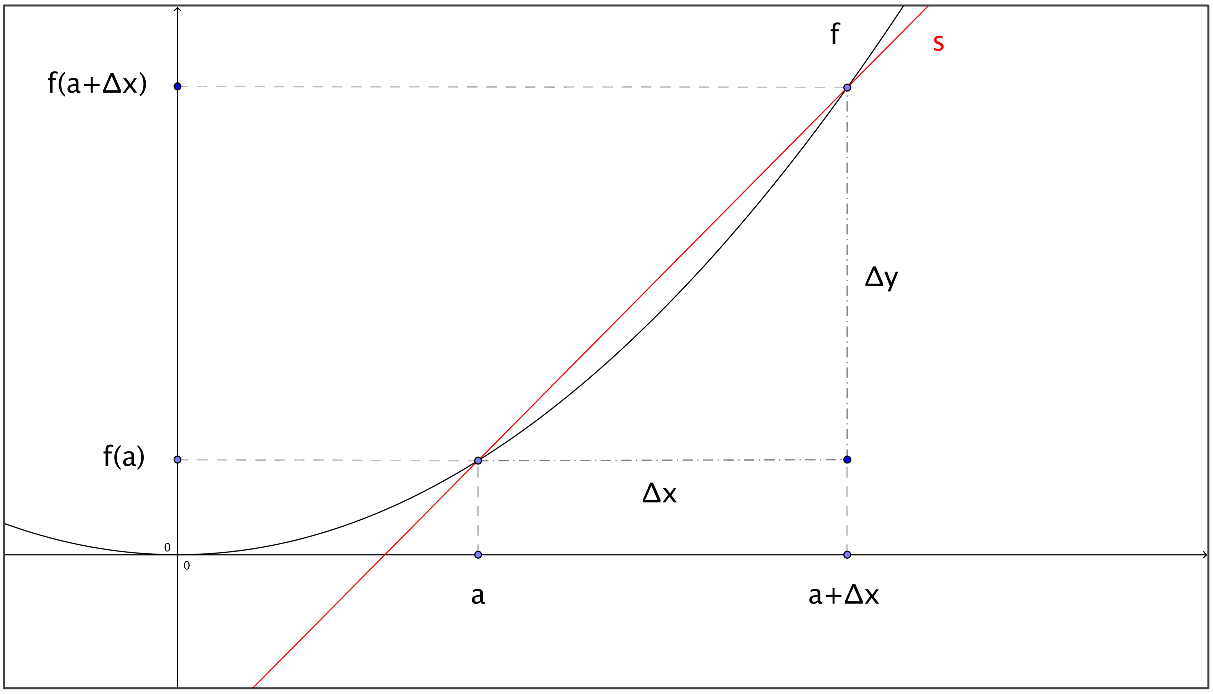
Den deriverte til en funksjon f i et punkt $x = a$ er definert ved:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Ut fra definisjonen kan man sette inn ulike funksjoner og regne ut den deriverte til funksjonen. Man kan bevise derivasjonsreglene ut ifra definisjonen. Det blir tungvint å sette inn funksjoner i definisjonen hver gang, så når man regner oppgaver brukes vanligvis derivasjonsreglene.

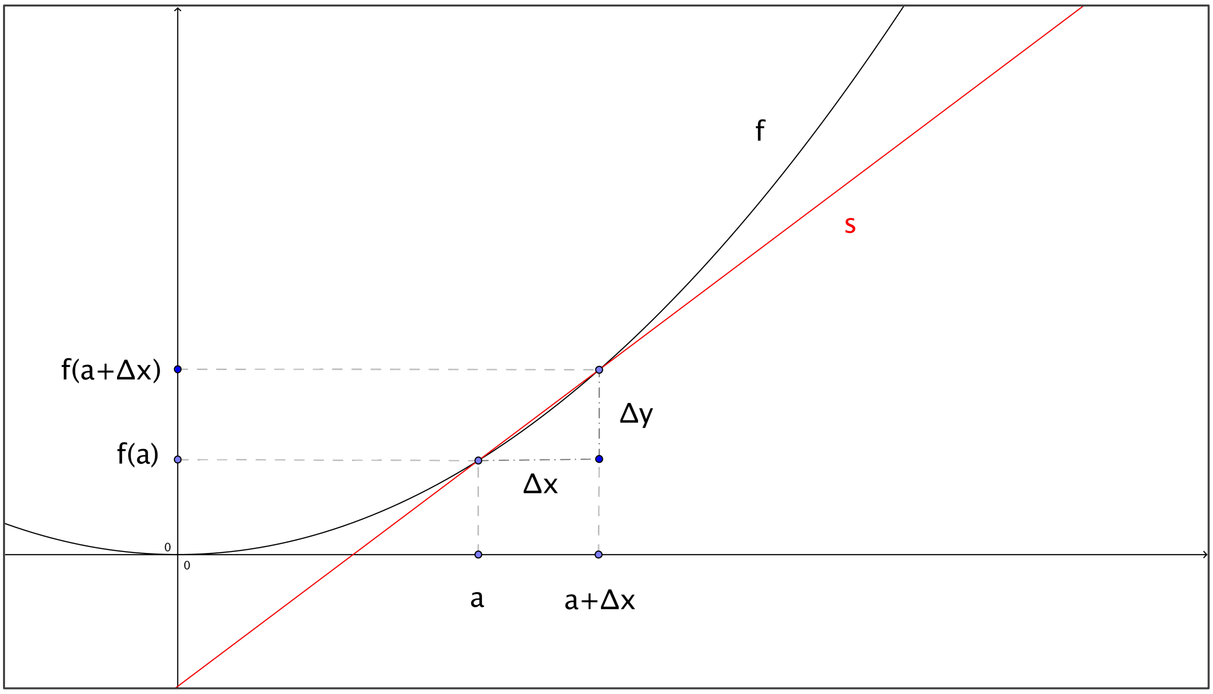
2.4.2 Grafisk tolkning

Nå skal vi se hvordan derivasjon kan tolkes grafisk. Jeg har i figuren under (Figur 2) tegnet funksjonen $f(x) = x^2$ i GeoGebra.



Figur 2: Funksjonen *f* tegnet i GeoGebra. Linjen s (rød) er sekanten som går igjennom punktene $(a, f(a))$ og $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$.

Funksjonen *f* er tegnet i svart. Vi har markert et punkt, a, på *x*-aksen og funksjonsverdien til *f* i a, $f(a)$, på *y*-aksen. Så har vi valgt et nytt punkt på *x*-aksen som ligger Δx til høyre for a. På samme måte har vi funksjonsverdien til dette punktet, $f(a + \Delta x)$, markert på *y*-aksen. Vi har nå fått to punkter på grafen til f, $(a, f(a))$ og $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$. Gjennom disse punktene har vi tegnet en rett linje s, denne linjen er en sekantlinje og er rød på figuren. I definisjonen av den deriverte ser vi i formel (1) at vi er interessert i forholdet mellom $f(a + \Delta x) - f(a)$ og Δx. På figuren er $f(a + \Delta x) - f(a)$ markert som Δy. Vi ser også Δx markert. I opplæringen av grafer i videregående skole lærer elevene at stigningstallet til en linje er gitt som forholdet mellom endring i *y*-verdi (Δy) og endring i *x*-verdi (Δx). Så den deriverte har altså noe med stigningstallet til sekanten å gjøre. Definisjonen er en grenseverdi, og den deriverte er grensen når Δx går mot 0. I figuren under (Figur 3) skal vi se hva som skjer når Δx går mot 0.



Figur 3: Når $\Delta x \;\rightarrow 0$ vil den røde linjen likne mer og mer på en tangent gjennom punktet $(a, f(a))$.

Her ser vi at Δx har blitt mindre. Størrelsen Δx kan aldri bli 0, men Δx kan bli så liten vi bare ønsker. Sekanten vil endre seg i takt med at Δx blir mindre, og når Δx går mot 0 vil sekanten bli mer og mer lik en tangent i punktet a. Derfor ser vi at den deriverte til en funksjon i et punkt er stigningstallet til tangenten i det punktet.

2.4.3 Anvendelser

Elever kan bruke den deriverte til blant annet å drøfte funksjoner, det vil si finne ekstremalpunkter (maksimums- og minimumspunkter). Dette kan for eksempel brukes i oppgaver om å finne når overskuddet til en bedrift er størst. Da lager man en overskuddsfunksjon (inntekt minus kostnad), og bestemmer maksimumspunktet til funksjonen. Elever i videregående skole drøfter kun kontinuerlige funksjoner. Om man tegner opp grafen til en funksjon vil man kunne se hvor grafen vokser og hvor den avtar, og eventuelt er konstant. Tegnes det inn tangenter i forskjellige punkter vil man se at den deriverte vil være positiv der grafen vokser, negativ der grafen avtar og at den vil være 0 i de stasjonære punktene. Stasjonære punkter kan deles i tre typer – terrassepunkter, lokale maksimums- og minimumspunkter. Er alle verdier av f i en omegn av punktet større en funksjonsverdien i punktet har vi et lokalt minimumspunkt. Om alle verdier av f i en omegn av punktet mindre en funksjonsverdien i punktet har vi et lokalt maksimumspunkt. Om den deriverte er 0 i et punkt og ikke disse to kriteriene er oppfylt er det et terrassepunkt. For å skille de stasjonære punktene fra hverandre kan vi se på fortegnet til den deriverte i et fortegnsskjema, men det finnes også andre metoder.

2.5 TIMSS Advanced

IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) er en uavhengig internasjonal organisasjon som utfører store studier på elever. En av studiene er Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS). TIMSS er igjen delt opp etter hvilken alder som undersøkes, og TIMSS Advanved ser på matematikk og fysikkferdighetene til elever med full fordypning som er i ferd med å avslutte videregående opplæring. Det er en komparativ undersøkelse, og den ble første gang holdt i 1995. Den gangen deltok kun fysikkelevene (3FY/Fysikk 2) fra Norge, mens norske matematikkelever (3MX/R2) ble undersøkt i 1998. Den neste studien ble gjennomført i 2008, da med både fysikk og matematikkelever fra Norge. Datainnsamlingen til TIMSS Advanced 2015 er i gang, men resultatene blir ikke klare før denne oppgaven er ferdigstilt. TIMSS Advanced regnes som en trendstudie (Cohen, et al., 2011), siden landene som deltar kan spore endringer over tid. I Norge er Institutt for Lærerutdanning og Skoleforskning (ILS) ved Universitet i Oslo prosjektansvarlige. For mer om TIMSS Advanced og rapporter henviser jeg til hjemmesiden deres (TIMSS Advanced, 2015).

2.6 Rammeverk

For å kunne skille de ulike oppgavetypene fra hverandre og danne et bilde av elevenes forståelse trenger vi et rammeverk. Det finnes mange ulike rammeverk som er egnet og kunne blitt brukt i denne oppgaven. Blant annet finnes et rammeverk utviklet for PISA undersøkelsen (OECD, 2013). Jeg har for min oppgave valgt å bruke det samme rammeverket som brukes i TIMSS Advanced 2008 studien (Garden, et al., 2006). Men jeg vil også sammenlikne PISA sitt rammeverk med det jeg bruker.

2.6.1 TIMSS Advanced rammeverk

TIMSS Advanced sitt rammeverk har vært under utvikling, og vil stadig utvikles. Fra å ha fem innholdskategorier og fem kognitive kategorier i 1995, hadde det frem til 2008 blitt tre innholdskategorier og tre kognitive kategorier. Innholdskategoriene er Algebra, Kalkulus og

Geometri. De kognitive kategoriene er Knowing (Kunne), Applying (Anvende), og Reasoning (Resonnere). I TIMSS Advanced 2008 ønsket de at 35% av oppgavene var kategorisert som Algebra-oppgaver, 35% som Kalkulus og 30% som Geometri. I de kognitive kategoriene ønsket de 35% av oppgavene kategorisert som Knowing, 35% kategorisert som Applying og 30% i Reasoning-kategorien (Grønmo, et al., 2010). I min mastergradsoppgave skal jeg kun ha med oppgaver kategorisert som Kalkulus, men fra alle de kognitive kategoriene. Vi skal nå gå litt nærmere inn på de tre kognitive kategoriene.

Knowing

For å forstå matematikk trenger man å være kjent med matematiske konsepter og kunne noen prosedyrer. Matematiske konsepter går på både språklige termer og hva symbolene betyr. Under Knowing-kategorien ligger også evnen til å kunne løse noen rutineproblemer. Det vil være å gjenkjenne problemstillinger og bruke de nødvendige operasjonene for å løse problemet. Eleven må også kunne hente nødvendig informasjon fra grafer og tabeller (se Tabell 1).

Tabell 1: Tabellen viser hvilke ferdigheter som ligger i Knowing-kategorien (Garden, et al., 2006).

	Behaviors Included in the Knowing Domain	
1	**Recall**	Recall definitions, terminology, notation, mathematical conventions, number properties, geometric properties.
2	**Recognize**	Recognize entities that are mathematically equivalent (e.g., different representations of the same function or relation).
3	**Compute**	Carry out algorithmic procedures (e.g., determining derivatives of polynomial functions, solving a simple equation).
4	**Retrieve**	Retrieve information from graphs, tables, or other sources.

Applying

Den kognitive kategorien Applying ligger på et høyere plan enn Knowing. Det er ikke nok å bare kunne vite ulike begreper og regne standardoppgaver, man må også kunne anvende kunnskapen til å løse ulike problemer. Problemløsningsoppgaver vil også gå under kategorien Reasoning, men i Applying-kategorien er de mer rutinebasert. Eleven må klare å velge fornuftig metode for å løse ulike problemer, representere matematisk informasjon på en god måte og kunne lage modeller (se Tabell 2).

Tabell 2: Tabellen viser hvilke ferdigheter som ligger i Applying-kategorien (Garden, et al., 2006).

	Behaviors Included in the Applying Domain	
1	**Select**	Select an efficient/appropriate method or strategy for solving a problem where there is a commonly used method of solution.
2	**Represent**	Generate alternative equivalent representations for a given mathematical entity, relationship, or set of information.
3	**Model**	Generate an appropriate model such as an equation or diagram for solving a routine problem.
4	**Solve Routine Problems**	Solve routine problems, (i.e., problems similar to those students are likely to have encountered in class). For example, differentiate a polynomial function, use geometric properties to solve problems.

Reasoning

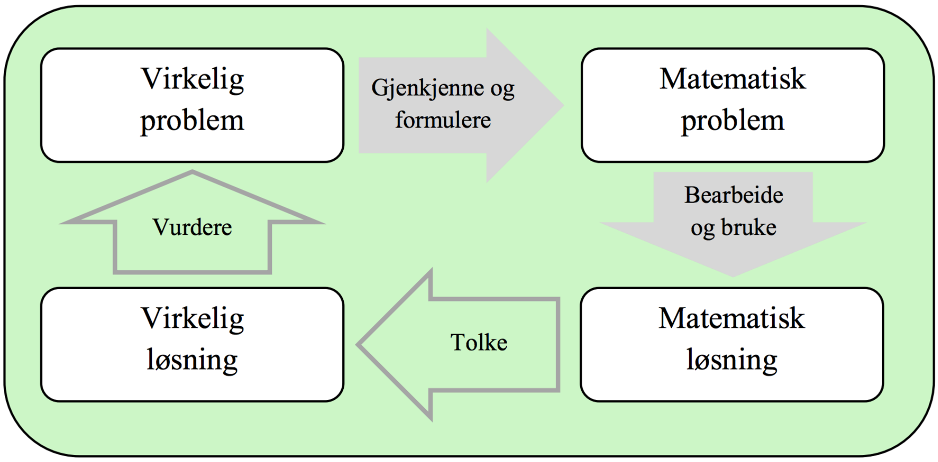
For elever kan ikke-rutineoppgaver være ukjente og mystiske. Elevene må da bruke kunnskapen de har og overføre den til nye situasjoner. De må kunne vurdere og komme fram til hvilken fremgangsmåte som er hensiktsmessig. Oppgavene kan være både rent matematiske og dagligdagse. Elevene må også kunne bruke kunnskap fra flere deler av matematikken og dermed ha relasjonell forståelse (se delkapittel 2.3). Reasoning er den øverste kognitive kategorien i rammeverket for TIMSS Advanced (se Tabell 3).

Tabell 3: Tabellen viser hvilke ferdigheter som ligger i Reasoning-kategorien (Garden, et al., 2006).

Behaviors Included in the Reasoning Domain		
1	Analyze	Investigate given information, and select the mathematical facts necessary to solve a particular problem. Determine and describe or use relationships between variables or objects in mathematical situations. Make valid inferences from given information.
2	Generalize	Extend the domain to which the result of mathematical thinking and problem solving is applicable by restating results in more general and more widely applicable terms.
3	Synthesize/ Integrate	Combine (various) mathematical procedures to establish results, and combine results to produce a further result. Make connections between different elements of knowledge and related representations, and make linkages between related mathematical ideas.
4	Justify	Provide a justification for the truth or falsity of a statement by reference to mathematical results or properties.
5	Solve Non-routine Problems	Solve problems set in mathematical or real-life contexts where students are unlikely to have encountered similar items, and apply mathematical procedures in unfamiliar or complex contexts.

2.6.2 Sammenlikning med PISA rammeverk

I PISA sitt rammeverk (Nortvedt, 2013) finner vi tre problemløsningsprosesser. Den første er «Gjenkjenne og formulere» hvor det innebærer å omforme gitt informasjonen til et matematisk problem. Deretter må eleven kunne løse problemet ved ulike metoder og ferdigheter som går innunder «Bearbeide og bruke». Til slutt i prosessen må eleven «Tolke og vurdere» svaret sitt (se Figur 4).



Figur 4: Modellerings- og problemløsningssyklusen

For å kunne være problemløsere trenger elevene ulike kompetanser. PISA har syv ulike kompetanser (Nortvedt, 2013):

- kommunisere med, i og om matematikk
- matematisere og modellere både matematiske og virkelige situasjoner
- representere matematiske størrelser, velge, veksle mellom og bruke matematiske representasjoner i oppgaveløsning
- resonnere og argumentere matematisk
- planlegge, velge ut og bruke problemløsningsstrategier
- bruke symbol- og formelspråk, regler og formelle matematiske metoder
- velge ut og bruke matematiske verktøy og hjelpemidler

Sammenlikner vi disse syv kompetansene med de tre kognitive kategoriene i TIMSS Advanced rammeverket, ser vi at noen passer godt, mens andre ikke passer inn. At elevene skal kunne «representere matematiske størrelser, velge, veksle mellom og bruke matematiske representasjoner i oppgaveløsning» og «bruke symbol- og formelspråk, regler og formelle matematiske metoder» vil gå under Knowing-kategorien i rammeverket til TIMSS Advanced. Kompetansene å «matematisere og modellere både matematiske og virkelige situasjoner», «planlegge, velge ut og bruke problemløsningsstrategier» og «velge ut og bruke matematiske verktøy og hjelpemidler» finner vi igjen i Applying-kategorien, og «resonnere og argumentere matematisk» faller naturlig i Reasoning-kategorien. Kompetansen «kommunisere med, i og om matematikk» vil derimot ikke gå inn en bestemt kategori i TIMSS Advanced rammeverket, men går igjen i alle kognitive kategoriene.

3 Metode

Jeg skal i dette kapitlet begrunne den metodiske tilnærmingen som er valgt for denne studien. Gjennomføring av datainnsamlingen blir også gjennomgått.

3.1 Valg av metode

Siden formålet med oppgaven er å se nærmere på elevenes forståelse av derivasjon, er en kvalitativ tilnærming hensiktsmessig. Hvor en kvantitativ metode vil kunne vise mønstre, likhetstrekk og sammenhenger hos en større elevgruppe, ønsker jeg å gå i dybden på noen få elever. De to hovedtilnærmingene i kvalitativ metode er observasjon og intervju. Å velge observasjon i matematikktimer kunne gitt gode data, men jeg ville ikke fått vite hvordan elevene tenker og reflekterer under for eksempel oppgaveløsning. Kvale og Brinkmann (2009) sier at for å komme inn i intervjupersonens verden er det kvalitative intervjuet en god tilnærming. Hovedmetoden for denne studien blir derfor kognitivt intervju.

Grunnen til bruken av ordet hovedmetode er at det i tillegg er en liten kvantitativ del i studien. Dette på grunn av at jeg ville intervjue elever med tilsynelatende forskjellige forståelsesprofiler. Dette kunne for eksempel være en elev med høy relasjonell forståelse og lav instrumentell forståelse, og noen med lav relasjonell forståelse og høy instrumentell forståelse. Derfor trengte jeg et grunnlag for å velge ut disse elevene. Det ble derfor bestemt å holde en test for en gruppe elever med noen derivasjonsoppgaver. Resultater og svarfordelingen av den kvantitative delen blir presentert i kapittel 4. Utvalget er på 28 elever og er ikke stort nok for noen generalisering. Disse resultatene blir bare kort kommentert, og kommer i bakgrunnen av resultatene fra hovedmetoden som er intervjuene.

3.2 Kvantitativ del - Testen

Jeg ønsket å danne meg et innblikk i elevenes forståelse av derivasjon før jeg skulle velge ut noen elever til intervju. Derfor laget jeg en test der de skulle svare på noen oppgaver som kan relateres til derivasjon. Oppgavesettet består av ni ulike oppgaver, men på oppgave 5 er det både a) og b), så jeg regner det som 10 oppgaver. Jeg ville ha oppgaver fra de tre ulike kognitive kategoriene Knowing, Applying og Reasoning. Fem oppgaver er kategorisert som Knowing, to oppgaver er Applying og tre oppgaver er Reasoning-oppgaver. Jeg ville ha med noen antatt enkle og antatt vanskelige oppgaver på hver av kategoriene.

Åtte av de 10 oppgavene er hentet fra de frigitte TIMSS Advanced-oppgavene. Grunnen til at jeg valgte å hente så mange oppgaver fra studien TIMSS Advanced er at det der finnes oppgaver som måler det jeg er ute etter. Oppgavene er laget med tanke på å finne ut hva elevene eventuelt tenker/gjør feil på oppgavene, i tillegg til at vi har data fra hvordan norske og internasjonale elever har skåret på oppgavene i 2008 og 1998 (internasjonalt 1995). Jeg ville komplimentere settet med to selvlagde oppgaver. Grunnen til dette er at jeg ønsket å ha med oppgaver som tester om elevene kan derivere et polynom, og en Reasoning-oppgave som tester geometrisk forståelse av den deriverte. To av de 10 oppgavene er flervalgsoppgaver og en er at de skal koble sammen grafer som hører sammen. Å kun ha flervalgsoppgaver alene ville ikke gitt så mye informasjon, men siden jeg gjennomfører intervjuer i tillegg vil jeg få svar på hvorfor elevene velger det svaralternativet de gjør. De andre oppgavene er oppgaver hvor elevene må komme fram til svaret ved regning eller forklaring.

Elevene skulle svare på oppgavearket de fikk utdelt. Jeg hadde laget god plass på arket der det trengtes utregning (se vedlegg). De fikk ikke kladdeark, så de gjorde utregningen på svararket. Dermed fikk jeg også se litt hvordan elevene kom fram til svarene sine, også på flervalgsoppgavene. Jeg ønsket at elevene skulle ha mest mulig like forutsetninger som når TIMSS Advanced-studien holdes. Testen ble gjennomført i slutten av januar måned, og det er kun noen uker før TIMSS Advanced gjennomføres. I TIMSS Advanced får elevene ha med kalkulator, i tillegg til at noen formler er oppgitt i heftet. Kalkulatoren har endret seg de siste årene, for 10 år siden var det vanlig med grafiske kalkulatorer. Nå er den mer eller mindre erstattet med en «vanlig» kalkulator, men at elevene i tillegg bruker PC med programmer som blant annet GeoGebra. Når jeg skulle velge tillatte hjelpemidler endte jeg opp på ingen hjelpemidler. Grunnen er at jeg ikke så noen oppgaver hvor det var opplagt at elevene hadde bruk for kalkulator, og at jeg ikke ønsket at de skulle ha tilgang til PC. Dette på grunn av at jeg ville undersøke forståelsen av matematikken, og ikke evnen til å la dataprogrammer løse oppgaven for dem. En feil som jeg gjorde var å ikke oppgi derivasjonsregler på testen, og da spesielt kvotientregelen. Disse reglene er oppgitt i oppgaveheftet til TIMSS Advanced. Dette kan ha påvirket resultatene i forhold til hvordan de som svarte på TIMSS Advanced gjorde det. Jeg kommer mer inn på det i kapittel 4.

3.3 Utvalg og utvalgskriterier

Utvalget til testen er to grupper R2-elever ved to forskjellige skoler. Den ene skolen ligger i en storby, mens den andre skolen ligger i en mindre by. Det er 22 elever som deltok fra R2-gruppen i storbyen og 6 deltakere fra R2-gruppen i den mindre byen. Til sammen har jeg 28 elever i den kvantitative delen av studien. Grunnen til at jeg tok med to grupper er at jeg ønsket å ha med cirka 30 elever. Det blir på ingen som helst måte gjort noen sammenlikninger mellom elevgruppene fra de to skolene, men de blir sett på som en helhetlig gruppe.

Utvalget til intervju ble, som nevnt i delkapittel 3.1, gjort på bakgrunn av svarene i testen. Jeg ønsket å få et innblikk i forståelsesprofilen til elevene, og ville se om det var noen elever som fikk til kun oppgavene i kategorien Knowing, men som ikke fikk til Applying- og Reasoning-oppgaver, og omvendt. I tillegg så jeg nærmere på svarene på de enkelte oppgavene og så om det var noe som tydet på høy relasjonell eller instrumentell forståelse. Jeg satt igjen med flere interessante elever, og inviterte fem av dem til intervju. Intervju er en tidkrevende metode, så jeg måtte begrense antallet.

3.4 Valg av intervjuform

Hvilken form intervjuet skal ha må sees i forhold til hva som skal belyses, se blant annet Dalen (2004). Jeg har valgt et oppgavebasert, semistrukturert intervju med oppgaver eleven har sett og løst på forhånd. Det finnes ulike typer intervju, og jeg skal kort ta for meg forskjellene.

Vi skiller mellom ustrukturerte, semistrukturerte og strukturerte intervjuer ut fra hvilke rammer og spørsmål som er bestemt på forhånd. I et ustrukturert intervju har ikke forskeren på forhånd noen planlagte spørsmål, og man får frie samtaler med informantene. Vi skjønner at det derimot kan være vanskelig å vite hvilke data man sitter igjen med etter intervjuene. I et strukturert intervju er derimot spørsmål og rekkefølge bestemt på forhånd, forskeren følger intervjuguiden til punkt og prikke. Det er da lettere å vite hvilke data man vil sitte igjen med, men man vil kanskje gå glipp av interessante data som den frie talen ville tillate at kom frem. Et semistrukturert intervju er en mellomting mellom ustrukturerte og strukturerte intervju. Man har spørsmål og rammer klare på forhånd, men er samtidig åpen for innspill og elevene får være med å påvirke spørsmålene. Skal man sammenlikne elever er det vanskelig om det ikke er noen felles rammer for intervjuene.

Oppgavebaserte intervju kan enten bestå av sette eller usette oppgaver. Sette oppgaver vil si at elevene på forhånd har sett oppgavene, og at man i intervjuet snakker om disse oppgavene. Hvis elevene ikke har sett oppgavene på forhånd, men får dem under intervjuet kalles det usette oppgaver (Houssart & Evans, 2011).

Jeg har, siden jeg ville bruke oppgavene som grunnlag i utvalget, gått for intervju med sette oppgaver. På forhånd har jeg satt opp spørsmål jeg ønsket å stille til eleven, med utgangspunkt i testen. Et typisk spørsmål kan være: «Hvordan gikk du frem når du skulle løse denne oppgaven?» og «Hvorfor kan man gjøre dette?» Hvis jeg på forhånd arbeider og kjenner godt til testen til elevene vil jeg enklere kunne stille utdypende spørsmål ved interessante svar eleven har skrevet under testen. Da vil datamaterialet også kunne bli rikere enn om man ikke er godt forberedt. I tillegg til at analyseprosessen vil bli enklere og mer sikker. Jeg ville at elevene skulle få fritt spillerom til refleksjon over oppgavene. Intervjuformen jeg endte opp med var da oppgavebasert, semistrukturert intervju.

Siden jeg ikke har erfaring innen forskning ønsket jeg å øve på intervjuerrollen før jeg skulle møte elevene. Jeg gjennomførte et intervju med et familiemedlem og et med en videregåendeskoleelev. I prøveintervjuene fikk jeg testet lydopptakeren og fikk kjenne på hvordan det var å være forsker. De gav meg tilbakemeldinger på hvordan de opplevde intervjuene. Ved å gjennomføre prøveintervju vil kvaliteten på studien øke (Goldin, 2000). Jeg ble også mer opptatt av at rollen min var forsker og ikke lærer. Jeg ble også tryggere i intervjusituasjonen.

3.5 Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste

For å kunne konsentrere meg om intervjuene, og ikke måtte notere ned alt som ble sagt, ønsket jeg å ta lydopptak under intervjuene. Det gir også mulighet til å få med alt som blir sagt under intervjuene. For å sikre personvernet ble prosjektet meldt til Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD), studien har fått prosjektnummer 41547 (se vedlegg 1) Godkjennelsen var på plass før jeg satte i gang med datainnsamling. Før jeg hadde testen med elevene fortalte jeg dem om meg selv og at jeg jobber med et mastergradsprosjekt som er en del av Lektorprogrammet ved Universitetet i Oslo. Dataene som kommer inn fra testen og intervjuene skal brukes i forbindelse med oppgaven. De fikk vite at prosjektet er ferdig til sommeren, og at opplysningene ikke vil være mulig å spore tilbake til dem. Brukes det navn i oppgaven vil det være fiktive navn. Alle elevene i testen ble også informert om at det var frivillig å være med, og at de til en hver tid kunne trekke seg uten å oppgi grunn.

3.6 Gjennomføring av datainnsamling

Jeg kontaktet avdelingsledere ved to skoler for å forhøre meg om jeg kunne gjøre datainnsamling med elever ved skolen deres. Jeg fortalte om mastergradsprosjektet mitt og de synes det var helt i orden at jeg fikk «låne» noen av elevene ved skolene til dette. Jeg fikk kontaktinformasjon til en faglærer i Matematikk R2 ved hver skole. Begge faglærerne var positive etter at jeg hadde forklart hva prosjektet gikk ut på, og vi avtalte tid hvor for når jeg kunne komme og holde testen ved skolene.

Jeg fikk lov til å holde testen i løpet av en matematikktime. Jeg gjennomførte testen ved de to skolene med to dagers mellomrom. Deretter begynte arbeidet med å gå igjennom og rette testene. Jeg skrev på eget ark hvilke oppgaver elevene fikk til og ikke, og hvilken type feil de gjorde. Så begynte jeg å analysere om det var noen elever som hadde utpreget instrumentell tilnærming til oppgaveløsningen eller om de viste tegn til relasjonell forståelse. Det var flere elever jeg synes var interessante, og plukket ut fem elever jeg ville intervjue. Jeg kontaktet faglæreren deres som igjen hørte med elevene om de var villig til å være med på intervju. Alle fem elevene var positive til å bli med. Jeg sendte elevene en melding dagen før hvor jeg minnet dem på at vi skulle møtes. Det var satt av 20 minutter til hvert intervju, og jeg fikk gjøre dette i løpet av tiden de hadde matematikk på skolen. Intervjuene ble holdt en uke etter at de hadde tatt testen. Jeg måtte få tid til å rette, samtidig måtte jeg minimere tiden mellom test og intervju slik at elevene fortsatt skulle huske oppgavene de hadde svart på.

Som nevnt ble intervjuene holdt på skolen til elevene, i løpet av matematikktimer. Vi satt på et eget grupperom hvor vi unngikk forstyrrelser fra andre. Før selve intervjuet startet repeterte jeg at det var frivillig å være med og at de kunne trekke seg uten grunn. De ble også spurt om det var greit for dem at jeg tok opp intervjuet, og at jeg ville slette lydopptaket så snart prosjektet er avsluttet. Lydopptakene skulle også bare brukes av meg i transkriberingsprosessen. De kunne også, når som helst, be om å få en pause om det skulle være behov for det.

Deretter begynte intervjuet, og eleven fikk utdelt oppgavesettet sitt. Oppgavesettet var helt likt det som var blitt levert inn, siden jeg hadde tatt notater på eget ark. Vi gikk igjennom oppgavene og eleven forklarte hvordan oppgavene var blitt løst og hva som var tankegangen bak fremgangsmåten. Jeg lot elevene få tenke selv og svare på det jeg spurte om. Om det gikk lang tid, og jeg så at eleven ikke var sikker på svaret gikk vi bare videre. Jeg var positiv og imøtekommende mot alle svar. Noen ganger forsøke jeg å stille oppfølgingsspørsmål eller spørsmålet på en annen måte for å få eleven til å tenke igjennom og begrunne svarene sine.

3.7 Transkribering og analyse

Da intervjuene var gjort begynte transkriberingsprosessen, en prosess hvor intervjumaterialet klargjøres for analyse. Jeg hørte igjennom lydopptakene og skrev ned alt som ble sagt under intervjuet. Jeg valgte å transkribere selv for å få jobbet mer med og kommet meg godt inn i datamaterialet. Strengt ordrette transkripsjoner er nødvendige for at en lingvistisk analyse skal kunne utføres (Kvale & Brinkmann, 2009). Var det latter, skrev jeg «hehe», og ellers alt etter hva som ble sagt. Ved tenkepause brukte jeg tre punktumtegn. Hvis eleven ikke fullførte setningen, men begynte rett på en ny setning (uten pause) brukte jeg to punktumtegn. For å sikre god forskning er det viktig at transkriberingen er pålitelig.

I analyseringen av datamaterialet gikk jeg gjennom dataene og holdt dette opp mot rammeverket. Jeg så etter hvilket nivå forklaringene var på, og hvilken forståelse av derivasjon eleven viste tegn på.

3.8 Etikk

I denne mastergradsoppgaven er elevenes svar på testen og intervjuene mitt datamateriale. Etiske problemstillinger oppstår når forskningen direkte berører mennesker (Johannessen, et al., 2010). Det er flere forhold man må tenke igjennom for å sikre at forskningen foregår på en etisk forsvarlig måte. Både Cohen et al. (2011) og Silverman (2006) tar opp utfordringer knyttet til forskningsetikk. Det er viktig at elevene er med på frivillig grunnlag. Man må ikke utsette elevene for noe som helst press til å være med, og de skal ha fått god informasjon om hva forskningsprosjektet går ut på. Jeg har, som vi var inne på i delkapittel 3.5 om Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste, gitt elevene informasjon om studien. I tillegg understreket jeg tydelig at det var frivillig å delta, og at de kunne trekke seg uten å oppgi grunn.

Et annet viktig prinsipp er konfidensialitet. Det er viktig at jeg som forsker behandler all informasjon konfidensielt. De elevene som er med i studien skal ikke kunne bli identifisert. Dette for at elevene som er med i studien ikke skal lide skade på noen som helst måte. På testen skrev elevene kun et nummer slik at jeg hadde en koblingsnøkkel med en klasseliste som ble oppbevart separat. Etter at jeg var ferdig med intervjuene ble listene med navn makulert. Lydopptakene er lagret på en pc som er passordbeskyttet. Det er kun jeg som har tilgang til og har hørt på disse, og de vil bli slettet så snart prosjektet er avsluttet. Navnene på de elevene jeg intervjuet er tilfeldige navn jeg har gitt dem, og ikke deres virkelige navn.

3.9 Validitet

Validitet går på sammenheng mellom metode og forskningsspørsmål. Kvale og Brinkmann (2009) skriver at validitet i samfunnsvitenskapelig forskning dreier seg om hvorvidt en metode er egnet til å undersøke det den skal undersøke. I denne mastergradsoppgaven er forskningsspørsmålene knyttet til elevenes forståelse av derivasjon, og som jeg argumenterte i delkapittel 3.1 er intervju en god metodisk tilnærming for dette formålet. Dette er med på å styrke validiteten til studien.

En trussel mot validiteten er forskeren evne til å være objektiv. Onwuegbuzie og Leech (2007) formulerer det slik:

> *Researcher bias occurs when the researcher has personal biases or a priori assumptions that he is unable to bracket. This bias may be subconsciously transferred to the participants in such a way that their behaviors, attitudes or experiences are affected. In addition to influencing participants unduly, the researcher could affect study procedures or even contaminate data collection techniques. Researcher bias does not occur only at the data collection stage, it can also prevail at the data analysis and data interpretation phases*

Som forsker må man prøve å identifisere truslene og fjerne disse, dette knyttes opp mot studiens validitet (Maxwell, 2013). At jeg er uerfaren som forsker kan være en trussel mot validiteten. Jeg har forholdt meg profesjonell til rollen, vært objektiv og forberedt meg best mulig til oppgaven. Det var viktig å tenke igjennom hvilke spørsmål og på hvilke måter de blir stilt under intervjuet. Kvale og Brinkmann (2007) sier at en liten omarbeiding av spørsmålsformuleringen kan påvirke svaret.

Validitet går også på om resultatene kan generaliseres (ytre validitet). Utvalget i den kvantitative delen av studien (testen) er for liten til å kunne generaliseres, men det var ikke intensjonen bak dataene. Funnene fra intervjuene kan også bare si noe om de fem elevene jeg intervjuet, og ikke noen andre. At man ikke kan generalisere funnene kan sees som en trussel mot validiteten. Men Goldin (2010) sier at det ikke nødvendigvis er et mål å søke etter generaliserbarhet, men heller beskrive metoden og analysen slik at «samme» intervju kan utføres et annet sted.

4 Resultater og analyse

I dette kapittelet skal jeg presentere resultatene på de 10 oppgavene i testen og elevenes tanker i intervjuene. For mer overordnet informasjon om testen og intervjuene henviser jeg henholdsvis til kapittel 3.2 (side 14) og kapittel 3.4 (side 16), og testen som helhet finner du i vedlegg 2.

For å gjøre dette kapitlet mest mulig oversiktlig har jeg valgt å presentere resultatene oppgave for oppgave. Jeg vil først kommentere oppgaven og begrunne hvorfor den er med i testen, presentere skåren på oppgaven og til slutt komme med noen didaktiske kommentarer og vise til sitater fra intervjuene. På de oppgavene som er hentet fra TIMSS Advanced-studien presenterer jeg også resultatene fra studien i 2008, hentet fra «Matematikk i motvind» (Grønmo, et al, 2010). I resultat-tabellene er skåren fra testen merket «Test», de norske resultatene fra studien TIMSS Advanced 2008 merket «Norge (2008)» og de internasjonale resultatene merket «INT (2008)».

De elevene som har vært til intervju er her kalt Cato, Elise, Simen, Mari og Anna. Vi blir litt kjent med dem i løpet av dette kapitlet. I kapittel 5 (side 41) skal vi ta for oss elev etter elev og se på forståelsesprofilen deres.

4.1 Oppgave 1

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 5$

Hva er $f'(x)$?

Kommentar til oppgaven:

Dette er en selvlaget oppgave, og er kategorisert av meg i rammeverket til TIMSS Advanced som en Knowing-oppgave (se side 9). Jeg ønsker å se om elevene får til å derivere et polynom. Å derivere et polynom vil jeg karakterisere som en standard oppgave som elevene i skolen har gjort mange ganger og er godt kjent med. De aller fleste er kjent med derivasjonsregelen for en potens $f(x) = x^r$ som gir $f'(x) = r\,x^{r-1}$. Den er så innarbeidet så de fleste deriverer uten å tenke. At første oppgave er en oppgave jeg regner med at de fleste vil få til var for å gi dem en god start. For noen elever vil det føles godt når man får til en oppgave.

Svarfordeling:

Tabell 4: Svarfordeling oppgave 1 (i prosent).

	Test
Rett	93
Galt	7
Ikke svart	0

Kommentarer til svarfordeling:

Det var 26 av 28 elever som fikk svaret $f'(x) = 3x^2 - 4x + 6$. At så mange fikk til oppgaven var helt forventet da oppgaven er relativt enkel. De to som fikk feil ser ut som slurv. Den ene skrev $2\mathrm{x}^2$ i stedet for $3\mathrm{x}^2$ og den andre skrev $3x$ i stedet for $3\mathrm{x}^2$.

Resultater fra intervjuene:

I intervjuene ville jeg høre om de synes denne oppgavetypen er lett. I tillegg ville jeg spørre de om de vet hvor regelen for derivasjon av et polynom kommer fra. I min egen skolegang var derivasjon mystisk fordi jeg ikke så sammenhengen mellom reglene og definisjonen av den deriverte, jeg regnet da ut svaret uten å vite så mye mer hva jeg gjorde. Alle elevene som jeg intervjuet fikk til oppgaven, og de var samstemte i at oppgaven var enkel. Da jeg spurte om det var enkelt å derivere et polynom sa en elev at «Ja, det er liksom ikke noe mer.. det er ikke noe sånn at man må sette inn u og bytte noen bokstaver og sånn. Det er bare å gjøre det liksom» (Elise). En annen elev sa at slike oppgaver «går egentlig helt automatisk» (Anna). Det er fint at elever lærer noe utenat, og at det går automatisk. Når vi lærer multiplikasjonstabellen pugger vi den for å kunne regne fortere. De fleste svarer at 3 ganger 7 er 21 automatisk. Hvorfor det er 21 tror jeg de fleste også klarer å svare på, 7+7+7 er 21. Men i intervjuene var det ingen som kunne svare på hvorfor den deriverte av f er $3x^2 - 4x + 6$. «Det er bare vanlige derivasjonsregler» (Simen). Jeg mener det er fint om elevene er bevisst på at når man setter inn en funksjon i definisjonen av den deriverte kommer den deriverte av funksjonen ut, som gir stigningstallet til grafen til funksjonen. For elevene kan det være motiverende å vite hvorfor det er slik og ikke «det er bare slik det er». I dette tilfellet kan det være med på å gjøre derivasjon mindre abstrakt, og man kan knytte det sterkere opp mot stigningstall.

4.2 Oppgave 2

Den deriverte av $\frac{4}{\sqrt{3x-4}}$ er

A. $12\sqrt{3x-4}$

B. $\frac{4}{\sqrt{3}}$

C. $\frac{-2}{(3x-4)^{\frac{3}{2}}}$

D. $\frac{-6}{(3x-4)^{\frac{3}{2}}}$

E. $6\sqrt{3x-4}$

Kommentar til oppgaven:

Oppgaven er kategorisert som en Knowing-oppgave i rammeverket til TIMSS Advanced (se side 9), og er en flervalgsoppgave hvor elevene får velge mellom 5 svaralternativer. Den sjekker om elevene får til å derivere en brøk, vet hva den deriverte av en kvadratrot er og om de husker kjerneregelen. Svaralternativ D er rett. Om man glemmer kjerneregelen vil man få et svar likt med alternativ C. Oppgaven tester også algebraferdighetene til elevene.

Svarfordeling:

Tabell 5: Svarfordeling oppgave 2 (i prosent).

	Test	Norge (2008)	INT (2008)
A	11	19	9
B	0	15	10
C	14	21	21
D	46	22	44
E	14	10	8
Ikke svart	14	13	9

Kommentarer til svarfordeling:

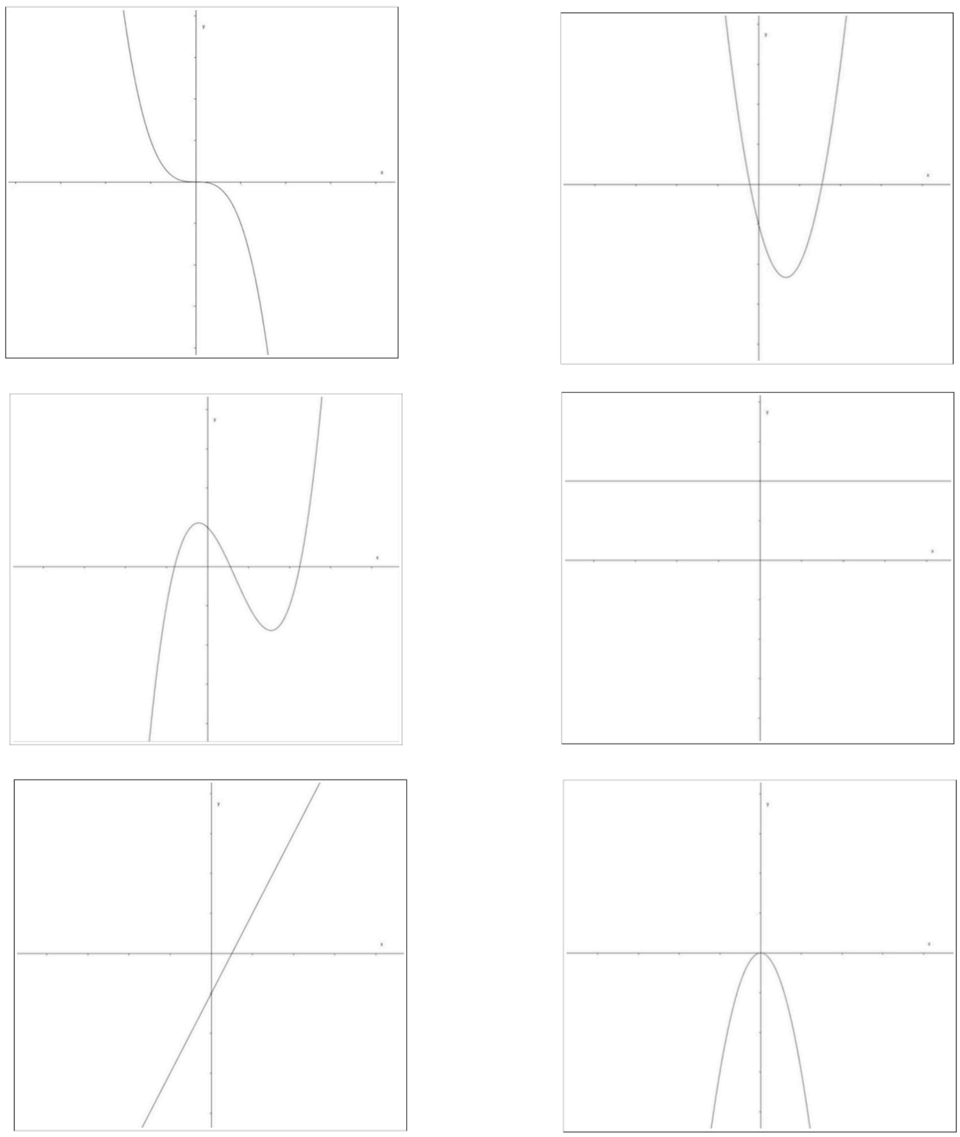
Vi ser av Tabell 5 at nesten halvparten av elevene fikk til oppgaven. At det er såpass stor andel, i forhold til studien TIMSS Advanced i Norge i 2008 kan ha noe med at det lille utvalget på 28 elever kanskje er litt bedre enn landsgjennomsnittet på slike oppgaver. Uansett skal man være litt forsiktig å sammenlikne resultatene uten kritisk sans. At elevene i testen ikke fikk oppgitt formel for derivasjon av en brøk gjør likevel resultatet bra.

Resultater fra intervjuene:

I intervjuene var fokuset på hvordan elevene tenker når de deriverer brøker, og om det var noe ved oppgaven som var spesielt vanskelig. Elevene synes det var greit å derivere brøker, men noen satt fast på den deriverte av kvadratrot og kjerneregelen. En elev satt ord på det: «Men så var det… kvadratroten som jeg slet litt med… Det er liksom den vanlige produktregelen og brøkregelen som er grei» (Elise).

4.3 Oppgave 3

I venstre kolonne er det tegnet grafen til tre ulike funksjoner. I høyre kolonne er grafene til funksjonenes deriverte. Sett strek mellom riktig funksjon og dens deriverte.



Figur 5: Oppgave 3 i testen. Grafene er tegnet i GeoGebra.

Kommentar til oppgaven:

Jeg ønsket å ha med en oppgave som går under kategorien Reasoning, og jeg kategoriserte denne under den kategorien i rammeverket til TIMSS Advanced (se side 9). Oppgaven går ut på å trekke streker mellom grafen til funksjonen og dens deriverte. Jeg tegnet tre ulike funksjoner inn i GeoGebra (se Figur 5). Jeg ville ikke at oppgaven skulle være for vanskelig, men likevel teste den relasjonelle forståelsen av derivasjon og geometri hos elevene. Elevene må kunne analysere opplysningene som blir gitt fra grafene, og løse en ikke-rutine oppgave.

Svarfordeling:

Tabell 6: Svarfordeling oppgave 3 (i prosent).

	Test
Rett	100
Galt	0
Ikke svart	0

Kommentarer til svarfordeling:

At alle elevene skulle koble sammen riktig (se Tabell 6) var uventet, grunnet at Reasoning-oppgaver ofte oppleves som vanskelige oppgaver. Elevene skal ikke regne ut noe, men bruke egenskapene til den deriverte og finne ut hvilke grafer som hører sammen. Likevel er ikke oppgaven veldig vanskelig. Vi ser at det er én lineær funksjon som dermed har konstant stigning hele tiden. De fleste koblet antakelig sammen den med den konstante grafen først. Da er det to igjen, som gjør vurderinga litt enklere.

Resultater fra intervjuene:

Formålet med intervjuet var å finne ut hvordan elevene resonnerte da de løste oppgaven. Da spesielt med fokus på om de viste relasjonell forståelse for sammenhengen mellom den deriverte og geometri. Det var en stor enighet om at oppgaven *ikke* var enkel. Anna sa at hun først koblet sammen den lineære grafen og den «flate» grafen, mens de to andre var «nesten vill gjetning». De brukte forskjellige metoder for å koble de sammen. Mari brukte det at den deriverte er 0 i stasjonære punkter som begrunnelse for hvilke grafer som hørte sammen. Elise brukte, som vi skal se nærmere på i delkapittel 5.2, grafen til den deriverte til å bestemme stigninga til den «egentlige grafen». Cato forklarte hvordan han tenkte: «Når du deriverer går du fra en 3. gradsfunksjon til en 2. gradsfunksjon, og en 2. gradsfunksjon til en 1. gradsfunksjon, og en 1. gradsfunksjon til en nulte da. Så jeg så jo veldig greit at dette er en 1. gradsfunksjon, så den vil jo bli som den ble. Men så var jeg litt mer usikker på disse to.» Cato har gode ferdigheter i algebra og vet at når man deriverte får man en funksjon som er en grad mindre, og prøver å finne grafer som passer med graden til funksjonen. Dette i stedet for at han går til kjernen i derivasjon og ser på stigningstallet til grafen. Når jeg spurte om han tippet på de siste to svarte han: «Ja altså, du ser den går negativ når den går positiv, så det må være noe minus der. Og den er jo minus, så det var det jeg tenkte da. Men jeg vet ikke om det er riktig.» Det var som sagt ingen av de 5 elevene som sa at de var *helt* sikre på oppgaven, men ut fra resultatene kan vi ikke tro at det er vill gjetting hos alle. Statistisk burde det da blitt 50-50 fordeling mellom alle rett og en rett. Det har i så fall vært «kvalifisert gjetting» hos de fleste. Elever er kanskje som oftest beskjedne og vil ikke innrømme at noe er greit før de er 100% sikre. At elever får trene mer på slike oppgaver kan bedre den relasjonelle forståelsen for sammenhengen mellom derivasjon og geometri.

4.4 Oppgave 4

Finn $f'(x)$ når $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$

Kommentar til oppgaven:

Denne oppgaven er kategorisert under Knowing-kategorien i rammeverket til TIMSS Advanced (se side 9), og elevene skal igjen derivere en brøk. Men her får de ingen svaralternativer, og regner seg selv frem til svaret. Jeg får se utregningen på oppgavearket. Sammenlikner vi med oppgave 2 er oppgaven litt enklere, siden det ikke er kvadratrot og at elevene ikke må huske kjerneregelen i denne oppgaven. Men generelt er flervalgsoppgaver enklere å løse enn oppgaver hvor de må regne ut selv (Grønmo, et al., 2010). Man må også i denne oppgaven beherske algebra for å trekke sammen telleren riktig.

Svarfordeling:

Tabell 7: Svarfordeling oppgave 4 (i prosent).

	Test	Norge (2008)	INT (2008)
Riktig svar	29	29	55
Galt svar, Kvotienregelen er brukt.	25	33	14
Andre gale	43	30	24
Ikke svart	4	8	7

Kommentarer til svarfordeling:

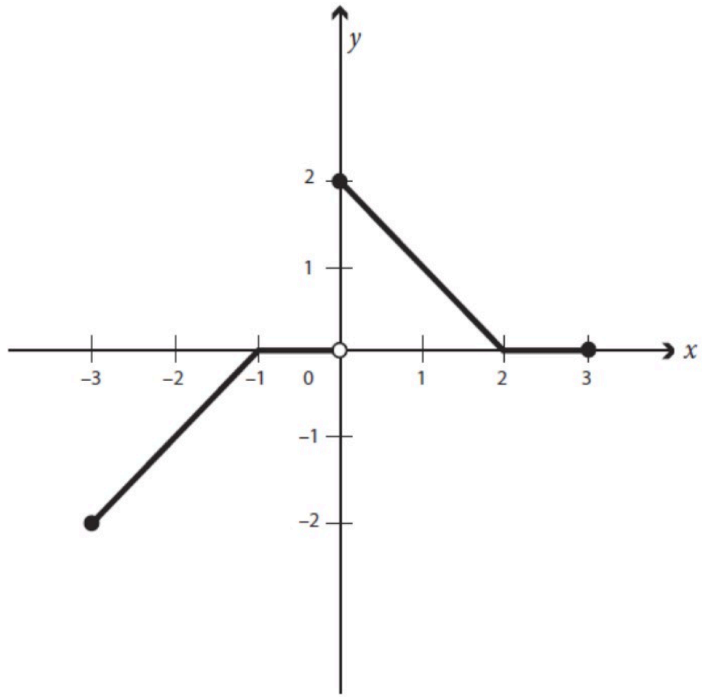
Det er færre som fikk til denne oppgaven enn oppgave 2. Vi ser i Tabell 7 at andelen er like stor som de norske elevene i TIMSS Advanced-studien. De elevene som går under kategorien «Andre gale» har begynt å derivere med feil derivasjonsregel. To av elevene brukte pluss i telleren i kvotientregelen i stedet for minus, og to andre elever har derivert teller og nevner hver for seg. Hadde derivasjonsregelen vært oppgitt ville mest sannsynlig flere elever fått rett svar.

Resultater fra intervjuene:

Jeg ville høre hva elevene synes om denne oppgaven i intervjuene. Elever synes slike oppgaver er greie, det er som Simen sier: «..derivasjonsregler. Rett fram.» Det som elevene gjør feil, bortsett fra å ikke huske hvordan man deriverer en brøk, er at de ikke får til algebraen. Det er en del som fikk feil når de løste opp en parentes med minus foran. Det viser at elevene ikke har ferdigheter nok i algebra, selv om noen av elevene tenker på det som en «slurvefeil».

4.5 Oppgave 5a

Funksjonen $y = f(x)$, $-3 \leq x \leq 3$ er definert ved følgende graf:



Figur 6: Grafen til funksjonen i oppgave 5. Hentet fra TIMSS Advanced (2015a).

For hvilke x-verdier i intervallet $-3 \leq x \leq 3$ er funksjonen IKKE kontinuerlig?

Kommentar til oppgaven:

Dette er en Knowing-oppgave, kategorisert i rammeverket til TIMSS Advanced (se side 9), hvor elevene skal gjenkjenne en definisjon. Denne oppgaven er ikke en utregningsoppgave, men forutsetter at elevene forstår eller husker betingelsen for når en graf ikke er kontinuerlig. «Kontinuitet er et grunnleggende og viktig begrep i forståelsen av funksjoner, og det har en presis matematisk definisjon» (Grønmo, et al., s. 88, 2010). De lærer om kontinuitet i R1, og kanskje noen har glemt det ett år senere.

Svarfordeling:

Tabell 8: Svarfordeling oppgave 5a (i prosent).

	Test	Norge (2008)	INT (2008)
Riktig svar	57	35	46
Galt svar	43	36	34
Ikke svart	0	29	20

Kommentarer til svarfordeling:

Av elevene som var med i undersøkelsen var det relativt mange som svarte riktig på denne oppgaven, se Tabell 8. Av de gale svarene var det flest som har svart x-verdiene fra -1 til 0. Det kan være at de ikke ser grafen mellom x-verdiene -1 til 0 siden grafen ligger på x-aksen. Ingen av elevene som var til intervju hadde svart det.

Resultater fra intervjuene:

Vi ser på funksjonen f at den ikke er kontinuerlig, at den «gjør et hopp», i $x = 0$. Når jeg gikk på videregående skole husker jeg at vi lærte at funksjonen ikke er kontinuerlig hvis man må løfte blyanten fra arket når man tegner grafen til funksjonen. Den forklaringen med blyanten er ikke alltid vanntett, ta for eksempel $1/x$. Mer presist har vi at en funksjon er kontinuerlig i et punkt om både grensen av $f(x)$ ovenfra og nedenfra går mot samme verdi i punktet. Så i intervjuene ville jeg prøve å forstå hvordan elevene tenker om kontinuitet. Flere av elevene ga uttrykk for at oppgaven var vanskelig. «Det er noe av det jeg synes er vanskeligst. Jeg er ikke så flink til å forstå funksjoner ordentlig» (Cato). Likevel visste han at grafen ikke er kontinuerlig der den gjør «et hopp». «Det er jo fordi den ikke henger sammen.. eee.. når x = 0» (Cato), Anna svarte også nesten på samme måte: «Det er jo at den ikke henger sammen, at det er et mellomrom der ($x = 0$) da.» Det var denne forklaringen som gikk igjen hos elevene.

4.6 Oppgave 5b

For hvilke x-verdier i intervallet $-3 < x < 3$ er funksjonen f IKKE deriverbar?

Kommentar til oppgaven:

Oppgave b er i likhet med oppgave 5a kategorisert i rammeverket til TIMSS Advanced (se side 9) som en Knowing-oppgave. Vi er på den samme funksjonen, men i oppgave b er spørsmålet når f ikke er deriverbar. Denne oppgaven er litt mer vanskelig for elevene, og går på når den deriverte til en funksjon er definert. Den deriverte i et punkt er stigningen til tangenten i det punktet, så spørsmålet kan omformuleres til om det finnes punkter hvor vi ikke klarer å tegne en tangent. Vi ser på grafen (i Figur 6) at stigningen gjør et hopp i $x = -1$ og $x = 2$, i tillegg til i $x = 0$ hvor den ikke er kontinuerlig.

Svarfordeling:

Tabell 9: Svarfordeling oppgave 5b (i prosent).

	Test	Norge (2008)	INT (2008)
Riktig svar	29	2	10
Galt svar, bare for $x = 0$	29	25	26
Galt svar, «f har ingen derivert der grafen er flat»	25	15	10
Andre gale svar	18	18	24
Ikke svart	0	40	30

Kommentarer til svarfordeling:

Vi ser at det er færre som får til oppgave 5b enn oppgave 5a, men likevel langt større andel enn de 2 prosentene som svarte korrekt i 2008 (se Tabell 9). At det er så få som får den til kan ha med formuleringer i læreplanen å gjøre (Grønmo, et al., s. 90, 2010).

Resultater fra intervjuene:

Igjen tilbake til min tid på videregående skole husker jeg vi «lærte» at funksjonen ikke er deriverbar i knekkpunkter og der hvor grafen ikke er kontinuerlig. Men å kun begrunne svaret med knekkpunkter viser tegn på instrumentell forståelse. Elever med relasjonell forståelse vil derimot også kunne si hvorfor. Formålet med intervjuene var igjen å gå bak svarene, og finne ut hvorfor elevene svarte som de gjorde. Av de elevene jeg intervjuet var det en del som sa de hadde vært gjennom dette i R1. Mari forklarer at «Vi har også lært at den ikke er deriverbar i knekkpunkter… Jeg tror det har noe med at det er forskjellig stigningstall fra hvor du kommer på x-aksen og sånn. Men jeg tenkte ikke så mye på det. Jeg bare så at det var et knekkpunkt.» Cato svarte at den ikke var deriverbar i $x = 0$, men tok ikke med knekkpunktene. Når jeg spurte han om han kunne fortelle meg hva det vil si at den ikke er deriverbar svarte han «Hvis du deriverer den og du ender opp med noe som ikke går.. Altså, eller noe som ikke stemmer ut ifra grafen da. Tror jeg..» Han var inne på at det ikke går å derivere funksjonen der den ikke er deriverbar. For en elev skal det ikke så mye tenking til før man ser og skjønner at det ikke er mulig å tegne tangenter i knekkpunkter og at vi derfor ikke har en derivert i de punktene. Et annet spennende moment å merke seg er andelen som svarer at den ikke er deriverbar der grafen er flat. Deriverbarhet går på om det eksisterer en derivert eller ikke, og selv om den deriverte er 0 så eksisterer den jo! Anna har en misoppfatning med det at det å være 0 betyr at den ikke eksisterer, vi ser tankegangen hennes her:

> *T: Vet du hva det betyr at en funksjon er deriverbar?*
> *A: At den har en stigning. Så da burde jo det være (ikke deriverbar) fra -1 til 0 da. Kanskje. Siden den er på x-aksen.*
> *T: Hmm.. Ja for hva er stigninga her?*
> *A: Den er jo 0.*

4.7 Oppgave 6

Bestem $\lim_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x^2-1}$

Kommentar til oppgaven:

Elevene skal løse en oppgave som burde være et rutineproblem for R2 elever, og oppgaven går under kategorien Applying i rammeverket til TIMSS Advanced (se side 9). Grenseverdier er et sentralt tema i matematikken, men det er relativt lite vektlagt i læreplanen (Grønmo, et al., s. 85, 2010). Grunnen til at jeg ville ha med meg en oppgave med grenseverdi er at definisjonen av den deriverte er en grenseverdi. Jeg har valgt å gjøre litt om på denne oppgaven i forhold til hva som ble gitt i TIMSS Advanced-studien. I telleren sto det egentlig $x^2 + x - 2$, men jeg ville ikke teste om elevene fikk til å faktorisere telleren. Jeg ville se om de fikk til å finne grensen. Samtidig ville jeg ikke faktorisere nevneren for dem, i fare for at det kunne bli alt for lett. Så da fikk nevneren stå som den var. Vi ser at om vi setter inn $x = 1$ får vi et 0 over 0 uttrykk, men at vi kan forkorte brøken ved hjelp av konjugatsetningen.

Svarfordeling:

Tabell 10: Svarfordeling oppgave 6 (i prosent). *Merk: oppgaven er gjort om i forhold til TIMSS Advanced 2008

	Test*	Norge (2008)	INT (2008)
Riktig svar $(\frac{3}{2})$	54	15	39
Galt svar	36	43	41
Ikke svart	11	42	20

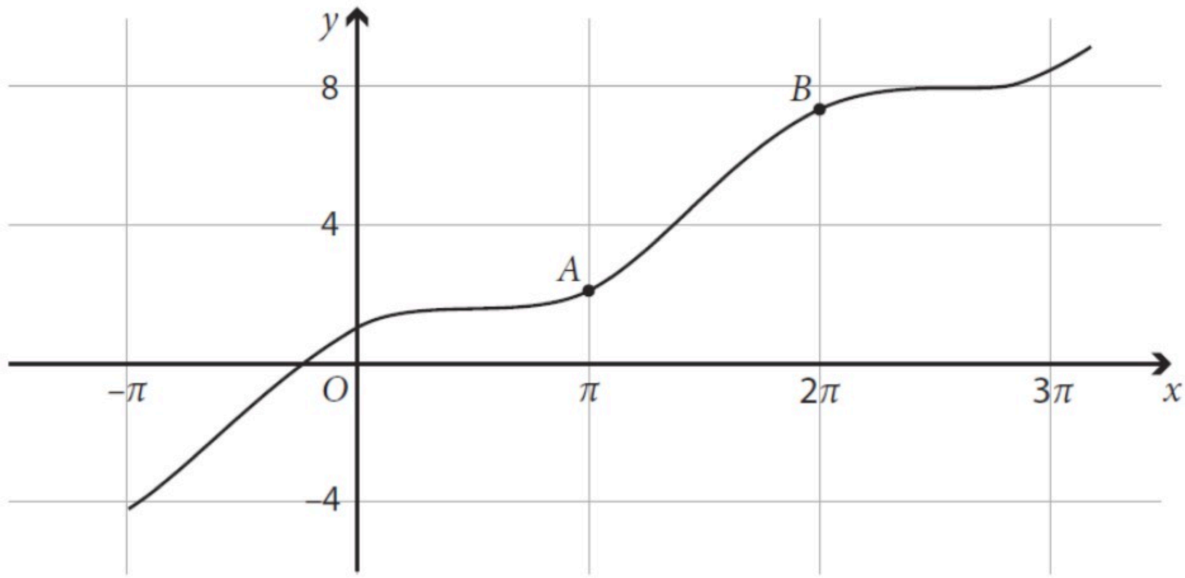
Kommentarer til svarfordeling:

Også på denne oppgaven var det over halvparten som fikk riktig svar (se Tabell 10). Oppgaven er blitt enklere, og det bør tas hensyn til i forhold til resultatene fra 2008.

Resultater fra intervjuene:

Fra elevenes side var det litt forskjellige måter og tenke på. Av de som fikk til å faktorisere og forkorte brøken kan vi se på hva Anna sier: «Tilfeldigvis hadde vi jobbet med akkurat det tror jeg, så.. Hehe. Så da husket jeg det. Men jeg prøvde jo.. først, og så at det ble 0. Så da må man faktorisere da.» Så de som husket at man faktoriserer og forkorter fikk oppgaven greit til. Av de som ikke husket det var Simen inne på hva man kan gjøre, nemlig å sette inn to x-verdier. «Jeg tenker at det er noe jeg ikke husker, som vi gjorde i fjor. Med at man skal sette x lik to forskjellige…» Som nevnt tidligere hadde ikke elevene tilgang til kalkulator, så han fikk ikke regnet det ut, men satt inn $x = 1$ og $x = 0,9$. Av de andre som jeg intervjuet var det en annen (Elise) som ikke visste hva hun skulle gjøre, så hun bare fjernet x-ene. Men som hun sier selv virker det helt urimelig.

4.8 Oppgave 7



Figur 7: Funksjonen $y = x + \cos x$ i oppgave 7. Hentet fra TIMSS Advanced (2015a).

Sofia studerer grafen til funksjonen $y = x + \cos x$ vist ovenfor. Hun sier at grafen har samme stigningstall i punkt A og i punkt B. Forklar hvorfor hun har rett.

Kommentar til oppgaven:

I rammeverket til TIMSS Advanced (se side 9) er denne oppgaven kategorisert som en Reasoning-oppgave. Elevene skal begrunne hvorfor utsagnet er korrekt. Dette er en oppgavetype elever sjeldent eller kanskje aldri har vært borte i tidligere. Om man forstår hva det betyr å ha samme stigningstall er ikke oppgaven så krevende. Som vi har vært inne på tidligere finner man stigningen til tangenten i et punkt når man deriverer. Hvis vi deriverer funksjonen, får vi $y' = 1 - \sin x$. I læreplanen for R2 står det: «Eleven skal kunne forenkle og løse lineære og kvadratiske likninger i trigonometriske uttrykk…» (Utdanningsdirektoratet, 2015). Elever som tar kurset R2 *bør* derfor vite at $\sin \pi$ og $\sin 2\pi$ begge er lik 0, og at vi derfor har samme stigning i punkt A og B. Om elevene vet hva de skal gjøre i møte med en ny type oppgave er likevel ikke sikkert.

Svarfordeling:

Tabell 11: Svarfordeling oppgave 7 (i prosent).

	Test	Norge (2008)	INT (2008)
Riktig svar	14	9	26
Galt svar	79	62	45
Ikke svart	7	30	29

Kommentarer til svarfordeling:

Av de 28 elevene som tok testen var det 4 som fikk den til. Vi ser i Tabell 11 at det er en relativt vanskelig oppgave for elever som testes i TIMSS Advanced, både nasjonalt og internasjonalt. Som vi har vært inne på tidligere kan det være vanskelig for elevene å koble sammen stigningen i et punkt med at man kan finne den deriverte i de to punktene.

Resultater fra intervjuene:

I intervjuene ville jeg få innblikk i hvordan elevene tenkte da de løste oppgaven og deres tanker rundt det å finne stigningen til grafen. Noe av det mest interessante fra intervjuene var samtalen med Elise:

> *T: Oppgave 7, så skal vi se.. Sofia sier at den har samme stigningstall i punkt A og punkt B. Også har du.. Jeg vet ikke om du kan forklare litt det du har skrevet, og det du tenker?*
> *E: Jeg tenker at det ser jo ut som en sånn.. vanlig sinus.. vi ser jo at det er en cosinus funksjon. Og den er jo, det er jo bølger, holdt jeg på å si. Så den vil jo alltid være.. kontinuerlig og lik holdt jeg på å si. Hmmm. Også tenkte jeg at hvis man deriverer*

den, så.. så forsvinner jo det ene x-leddet, det blir til 1. Det blir bare en konstant. Og da vil jo, da vil ikke bølgene gå sånn oppover, de vil ha.. gå mellom.. si 0 og 4 eller noe da. Men, og da blir jo.. Vi ser.. Eller sånn jeg tenker at det ser ut som det er et bunnpunkt og det der er et toppunkt. Og topp og bunnpunkt har stigningstall 0. Så, da tenkte jeg at det var det samme. Jeg vet ikke om det er helt riktig, men..
T: Det er spennende tanker. Ja, så..
E: Jeg skrev også at de var en halv periode unna hverandre, og det ser ut som.. ser ut som det er bølgelengde 2pi, eller periode 2pi.
T: Vet du hva sinus til pi og sinus til 2pi er?
E: Nei... Ehh... hehe. Eller.. Sinus til pi, det er… 0, og 2pi er også 0.
T: Ja.
E: Da er det jo… Å ja, var det så lett? Hehe!

Eleven forstod at den deriverte til funksjonen (stigningen til grafen) alltid må ligge mellom to verdier. De verdiene er 0 og 2 og ikke 0 og 4 som hun tippet. Og tenkte at da vil stigningen være den samme flere ganger, og hun tenkte at stigningen i topp- og bunnpunkter er null. Hun treffer ikke spikeren midt på hodet, men er inne på noe. Vi ser tydelig tegn på den proksimale utviklingssone da hun får et lite hint om at hun kan bruke sinus til pi og 2i, også får hun til resten selv.

I samtale med Cato ser vi at elevene kan bli usikre i møte med nye oppgavetyper. Selv om han egentlig vet hvordan han kan finne stigningen til grafen, er det noe som stopper han. Vi kan se på hva han sa:

C: Den var jeg veldig usikker på egentlig. Jeg var.. Nei jeg skjønte ikke helt hvordan jeg skulle forklare det, så da..
T: Nei, vet du hva det vil si.. Eller hvordan vi kan finne ut stigningen til en graf?
C: Ehh … Ja, eller, hvis du deriverer grafen da. Så.. vil du finne.. kunne finne stigningstallet. Ehh, det tenkte jeg ikke på da. Det burde jeg kanskje gjort.

4.9 Oppgave 8

$f(x) = x^4 - 2x^2$

Bestem lokale maksimums- og minimumspunkter til grafen til *f*.

Kommentar til oppgaven:

Oppgaven går under kategorien Applying i rammeverket for TIMSS Advanced (se side 9). Elevene skal bruke den deriverte til å drøfte en funksjon, eller sagt med andre ord, finne maksimums- og minimumspunkter. Det er et eget mål i læreplanen som sier at: «Eleven skal kunne derivere sentrale funksjoner og bruke førstederiverte og andrederiverte til å drøfte slike funksjoner» (Utdanningsdirektoratet, 2015). Så i motsetning til oppgave 7, er dette en oppgavetype norske elever bruker relativt mye tid på i undervisningen og har vært borte i flere ganger tidligere. Når man løser en slik oppgave er den mest vanlige fremgangsmåte å derivere funksjonen og løse likningen for den deriverte av funksjonen lik 0. Dette på grunn av at i topp-, bunn- og terrassepunkter (stasjonære punkter) er den deriverte (stigningen) lik 0. Deretter faktorisere man den deriverte og sette faktorene inn i et fortegnsskjema for å finne ut hvor den deriverte er positiv (grafen til funksjonen er voksende) og der den deriverte er negativ (grafen til funksjonen er synkende). Slik skiller man de stasjonære punktene fra hverandre, ved at i et toppunkt vil den deriverte gå fra positiv til negativ og i et bunnpunkt vil den deriverte gå fra negativ til positiv. I terrassepunkter vil den gå fra å være negativ/positiv, innom 0, for så å fortsette og være negativ/positiv. Det er også andre metoder enn fortegnsskjema for å bestemme ekstremalpunkter, som for eksempel å regne ut ulike funksjonsverdier der det er hensiktsmessig. Funksjonsverdiene til maksimums- og minimumspunktene finner man ved å sette inn x-verdiene i funksjonen.

Å finne maksimums- og minimumspunkter er en ganske stor oppgave. Det er mye man skal gjøre. Det er ikke nødvendig å ha forståelse for hva man gjør for å kunne løse oppgaven, det finnes elever som pugger fremgangsmåten. De vet ikke hvorfor de gjør som de gjør, men som blir tilfredsstilte ved å få rett svar. Å finne ut om noen er bevisste på hva de gjør vil jeg ikke kunne få svar på ut i fra svarene på testen, men intervjuene vil gi svar på det.

Svarfordeling:

Tabell 12: Svarfordeling oppgave 8 (i prosent).

	Test	Norge (2008)	INT (2008)
Riktig svar	25	26	19
To av tre rette	7	11	5
Kun x-verdier	4	4	7
Andre gale	61	26	32
Ikke svart	4	33	38

Kommentarer til svarfordeling:

Vi ser i Tabell 12 at det er cirka lik fordeling på testen som i studien TIMSS Advanced, og at en fjerdedel har fått til oppgaven korrekt. Som vi har vært inne på er det mange fallgruver å gå i, men i og med at oppgavetypen i forskjellige former ofte blir gitt til eksamen og derfor antakeligvis blir nøye gjennomgått i klasserommene, ville jeg tenke at det burde være flere som skulle få den til.

Resultater fra intervjuene:

Oppgaven kan for noen være en «følge oppskrift» regneoppgave, mens for andre kan man enkelt tenke seg frem til hva man skal gjøre og på den måten være en forståelses oppgave. I intervjuene vil jeg derfor sjekke om elevene kan forklare hvorfor de har gjort som de har gjort. For elever med god relasjonell forståelse vil jeg forvente at alarmbjeller ringer ved eventuelle svar som *ikke* kan være riktig. Noen vil kanskje prøve seg på at det er en slurvefeil, men om for eksempel antall stasjonære punkter ikke stemmer overens med graden til funksjonen vil dette være et tegn på at elevene ikke forstår hvordan ulike funksjoner ser ut.

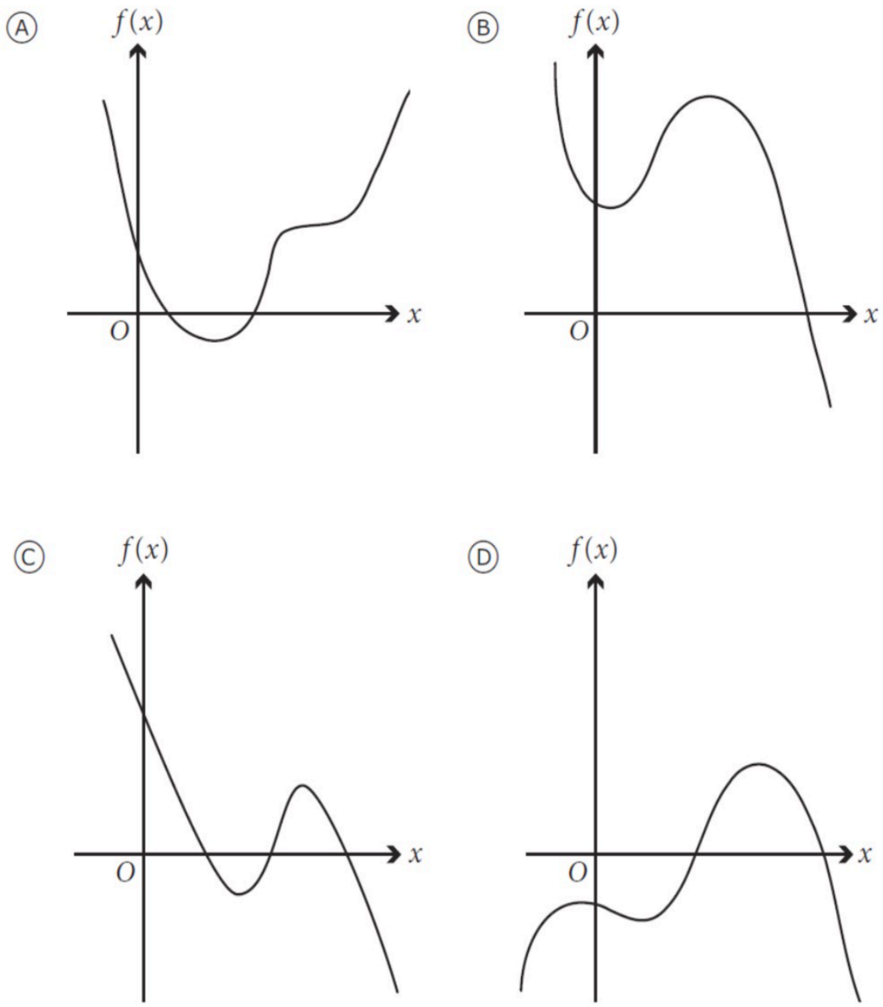
Det første hinderet elevene skal over er å derivere og sette den deriverte lik 0. Simen virket litt usikker på forklaringen av hva han hadde gjort, så jeg spurte han om det var noe han hadde lært. Han svarte: «Det er bare noe jeg har lært og sett i boka. Det er en sånn oppskrift. Hvis en skal finne nullpunkt så setter man f x lik 0, og når man skal finne toppunkt og bunnpunkt så er det den deriverte lik null. Så det er ikke noe mer enn det tror jeg.» Vi ser her tydelig tegn på instrumentell forståelse. Han har lært at det er slik vi gjør det, men ser ikke det i sammenheng med annen kunnskap og vet hvorfor vi gjør det. Videre i oppgaven deriverer han riktig, men så går det i stå. Han mister en x-verdi ($x = -1$) og får kun med x-verdiene 0 og 1. Så setter han opp den minste x-verdien som minimumspunkt og den største som maksimumspunkt. Han får nesten til regninga, men han vet ikke helt hva han er på jakt etter. Jeg sier at vi også ønsker y-koordinaten, og spør hvordan han vet hvilken som er maksimums- og hvem som er minimumspunkt. Da svarer han: «Ja, man kan.. det var mye i fjor.. Fortegnslinja. Vi har gjort det en gang i år, så.. det sitter ikke helt inne.» Eleven har bare lært en oppskrift for hvordan han skal løse oppgaven, og når han ikke husker oppskriften så blir det vanskelig å tenke seg frem til hvordan det kan gjøres.

Tre av de jeg intervjuet ga gode svar på hvorfor vi setter den deriverte lik null for å finne potensielle maksimums- og minimumspunkter. «For nullpunktet til den deriverte er jo.. der er jo stigningstallet til den egentlige grafen 0 i topp- og bunnpunktene. Og da må det jo være et nullpunkt til den deriverte» (Elise). Her ser vi at eleven vet hva hun skal gjøre og hvorfor, som er tegn på relasjonell forståelse i derivasjon og geometri. En annen forklaring er «… Det er jo null stigning da, så da er grafen vannrett og da finner du topp- og bunnpunkter» (Cato). Elevene visste også at det kunne være terrassepunkt når den deriverte er null.

4.10 Oppgave 9

Hvilken av grafene nedenfor kan ha alle disse egenskapene?

$f(-1) > 0$, $f(3) < 0$, $f'(5) = 0$, $f''(5) < 0$



Figur 8: Elevene skal vurdere hvilken av disse fire grafene som passer med de fire kriteriene i oppgave 9. Hentet fra TIMSS Advanced (2015a).

Kommentar til oppgaven:

Den siste oppgaven går under kategorien Reasoning i rammeverket til TIMSS Advanced (se side 9), og er en flervalgsoppgave. Elevene må analysere hvilken av grafene som stemmer med kriteriene. Elevene får gitt 2 kriterier som går på funksjonsverdi ved gitt x-verdi, et kriterie med den førstederiverte og et med den andrederiverte. At funksjonsverdien når $x = -1$ er større enn null utelukker svaralternativ D, for D-grafen er under x-aksen til venstre for y-aksen. Videre må elevene bruke de andre kriteriene til å resonnere seg frem til rett svar. Oppgaven krever altså at elevene har forståelse av grafer og den deriverte og dobbeltderiverte, og klarer å bruke dette i en analyse av ulike grafer.

Svarfordeling:

Tabell 13: Svarfordeling oppgave 9 (i prosent).

	Test	Norge (2008)	INT (2008)
A	25	12	14
B	21	18	14
C	43	36	46
D	4	20	15
Ikke svart	7	14	14

Kommentarer til svarfordeling:

Det var klart flest som valgte svaralternativ C (se Tabell 13). Som jeg var inne på i kommentar til oppgaven luker man bort alternativ D om man ser at det første kriteriet ikke stemmer overens med grafen, og det er kun 1 som har svart alternativ D. Ellers er det jevnt mellom A og B. Alternativ B «lukes bort» fra det andre kriteriet, så det var litt rart at så mange har svart det. Både A og C går igjennom de tre første kriteriene, og skilles kun på det siste.

Resultater fra intervjuene:

I intervjuene ville jeg være med inn i resonnementet til elevene. På det siste kriteriet, at $f''(5) < 0$, vil en forklaring med blid eller sur graf ikke være nok for å vise at man forstår hvorfor det er slik. Sier man derimot at når den dobbeltderiverte er mindre enn null vil stigningen til grafen avta, derfor må grafen være konkav/krumme nedover, viser man at man forstår hvorfor. De fleste elevene jeg intervjuet resonnerte seg fram til det siste kriteriet og sto da igjen med valget mellom A og C. Vi kan høre hvordan elevene resonnerte på det siste. «Også husker jeg vel egentlig ikke helt hvorfor jeg kom fram til den. Det er kanskje noe med at den… ser ut som at det er en.. funksjon med flere ledd. Ehh. Så.. Jeg bare følte at den var mer riktig da. Men det er litt gjetting egentlig.» (Cato). Han endte opp på feil alternativ, så han hadde ikke instrumentell forståelse (sur/blid graf) eller nok kunnskap om den dobbeltderiverte til å bruke det siste kriteriet. Mari var heller ikke sikker på hvilken av de to siste som var korrekt, hun sa:

> *M: Ehh også.. hehe. Var det den siste som var litt tricky. Eeee. Dobbeltderiverte mindre enn 0. Da… tenkte jeg i hvert fall at den.. At den gå nedover på en eller annen måte. Jeg er ikke helt sikke på hvordan jeg tenkte. Jeg tenkte lenge og kom fram til et eller annet, men jeg kommer ikke på hva det var.*
> *T: Men hvis du tenker på det nå, så.. Så vet du ikke helt hva…*
> *M: Nei, vi har jobbet mest med forholdet mellom deriverte.. Eller f og deriverte, men det er litt.. Jeg synes det er litt vanskelig å.. Jeg tenker mer fysikk. Akselerasjonen er negativ og sånn.. Da bremser den jo. Og når den snur og går ned, om det blir en positiv akselerasjon. Ee.. så ja..*

Vi ser at hun kommer frem til rett svar, selv om den matematiske forklaringen ikke er helt stødig. Hun bruker det hun har lært i fysikken med at den dobbeltderiverte av posisjonsfunksjonen er akselerasjonen, og det er helt riktig at den deriverte (farten) må bli mindre (bremse) når den dobbeltderiverte er mindre enn null. Det var overraskende at elever som gav en god forklaring om den deriverte ikke klarte det om den dobbeltderiverte. Vet de *virkelig* hva den deriverte er da? Elever som forstår derivasjon bør også utfordres til og også virkelig forstå den hva den deriverte av den deriverte sier oss. Det er jo «kun» derivasjon en gang til.

5 Forståelsesprofiler

I denne delen skal vi se nærmere på det jeg kaller *forståelsesprofiler* blant elever knyttet til de matematiske emnene vi ser på i denne mastergradsoppgaven. Det finnes mange forskjellige forståelsesprofiler og flere ulike måter å beskrive disse på. Jeg har her laget et system for hvor jeg rangerer *relasjonell forståelse* og *ferdigheter* i *stor grad*, *middels grad* og *liten grad* i tre komponenter. De komponentene som jeg har valgt å ha med er «derivasjon og geometri», «derivasjon og algebra» og «algebra og geometri» (se Tabell 14). Valget av komponenter er bestemt av datamaterialet. Jeg ønsker, som vi ser av tittelen på mastergradsoppgaven, å se på forståelse. Det som legges i relasjonell forståelse for *sammenhengen mellom derivasjon og geometri* er at man forstår hvordan den deriverte kan tolkes grafisk. Det vil si at man ser den deriverte som stigningstallet til tangenten, og kan bruke dette til å drøfte grafer. Relasjonell forståelse for *sammenhengen mellom derivasjon og algebra* er at man har forståelse for hva man regner ut, og kan bruke svarene sine til å si noe om den deriverte. Relasjonell forståelse for *sammenhengen mellom algebra og geometri* er at man har forståelse for hvordan grafer til ulike funksjoner ser ut. Generelt vil man ikke ha relasjonell forståelse om man får et svar, som opplagt er feil, og ikke ser at svaret ikke kan være rett. I systemet for forståelsesprofiler har jeg, i tillegg til relasjonell forståelse, tatt med ferdigheter. Dette på grunn av at jeg ønsker å se på både forståelse og ferdigheter i hver komponent. Ferdigheter går på evne til å løse oppgaver. Vi vet at det går å løse oppgaver uten relasjonell forståelse, og å ha forståelse uten å kunne løse oppgaver. Begrunnelsen for å kalle det ferdigheter i stedet for instrumentell forståelse er at hvis en elev har instrumentell forståelse i en komponent, kan det tolkes som at den ikke har relasjonell forståelse.

Vi skal ta for oss tre av de elevene jeg har intervjuet en etter en (Cato, Elise og Simen), og danne oss et bilde av forståelsesprofilen deres. De to siste elevenes forståelsesprofiler (Mari og Anna) blir gått igjennom mindre omfattende.

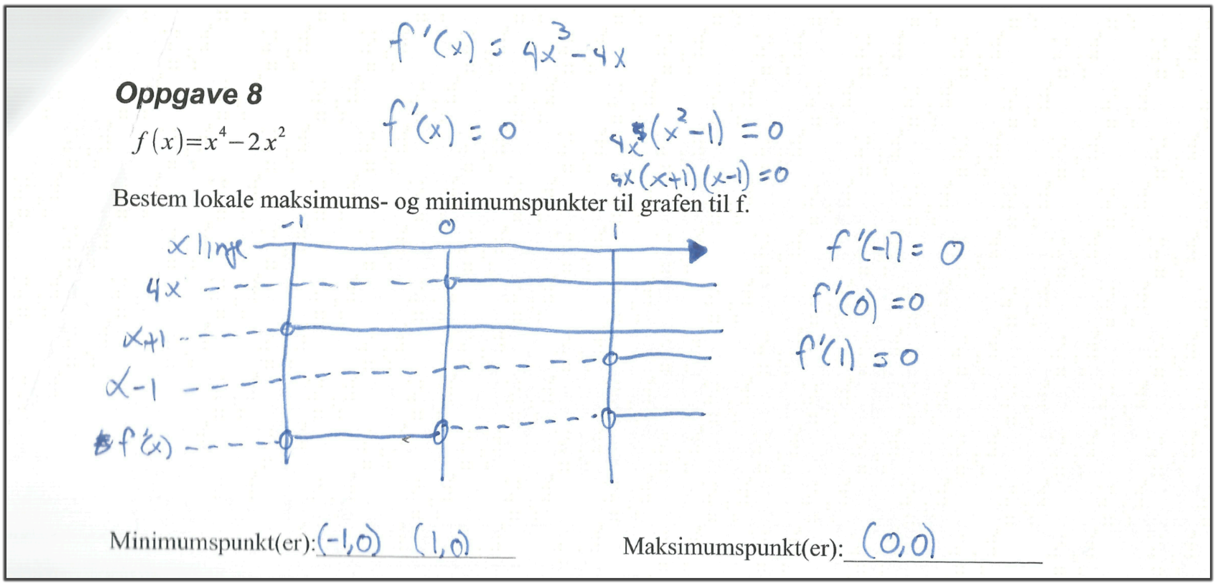
Tabell 14: En tabell som viser en elevs forståelsesprofil.

Komponenter	**Relasjonell forståelse for sammenhengen**	**Ferdigheter knyttet til sammenhengen**
Derivasjon – geometri	Stor/middels/liten	Stor/middels/liten
Derivasjon – algebra	Stor/middels/liten	Stor/middels/liten
Algebra – geometri	Stor/middels/liten	Stor/middels/liten

5.1 Cato

På testen fikk Cato rett svar på oppgave 1, 2, 3, 4, 5a og 6, mens han fikk feil på oppgave 5b, 7, 8 og 9. Cato er god i algebra, hoderegning og husker formler godt. Som nevnt i delkapittel 3.2 fikk de ikke oppgitt derivasjonsreglene til oppgavene. Dette var ikke noe problem for han, for som han selv sier: «de reglene husker jeg ganske godt ifra R1.»

Vi ser fra blant annet oppgave 2, 4 og 6 at han er flink i mekanisk regning. Catos svar på oppgave 8 bekrefter også dette (se Figur 9). Men han får ikke riktig svar. Det er fordi han setter x-verdiene for minimums- og maksimumspunktene inn i f-derivert for å finne punktene. Han hadde to mulige funksjoner å sette x-verdiene inn i (f og f'), og selv om han fikk y-verdiene 0 på alle tre punktene, som betyr at de ligger på linje, fortsatte uten at det ringte noen alarmbjelle. Han hadde allerede funnet ut at f' *er* 0 i ekstremalpunktene, og må sette x-verdiene inn i funksjonen f for å finne 2. koordinatene til punktene. Han sliter med den relasjonelle forståelsen for sammenhengen mellom derivasjon og algebra, og sammenhengen mellom algebra og geometri, men har gode ferdigheter. Selv virker han klar over dette, han sier at: «Jeg synes de, sånn.. hvor du bare skal derivere er lettere da. Jeg er litt dårligere på forståelse av derivasjon. Men selve derivasjonen synes jeg får til ganske bra..»



Figur 9: Catos svar på oppgave 8 i testen.

Når han løser derivasjonsoppgaver støtter han forklaringen til hvilke mønstre han ser når han regner, og ikke til selve kjernen i derivasjon. Som vi har vært inne på før (i delkapittel 4.3) sier han i forklaringen på oppgave 3 at: «Når du deriverer så går du fra en 3. gradsfunksjon til en 2. gradsfunksjon, og en 2. gradsfunksjon til en 1. gradsfunksjon og 1. til nulte da.» Han gjenkjenner altså nultegradfunksjoner som vannrette grafer, førstegradsfunksjoner som lineære grafer, andregradsfunksjoner som parabler og tredjegradsfunksjoner som grafer med både maksimum- og minimalpunkter. Han klarer lett å koble sammen førstegradsfunksjonen med den vannrette grafen i oppgave 3, men blir mer usikker når det er to tredjegradsfunksjoner som skal kobles sammen med to andregradsfunksjoner. Igjen ser vi at slike oppgaver faller vanskeligere for han enn rene regne oppgaver. Catos forklaring på sammenkoblingen fører til riktig svar, men med usikkerhet: «Ja altså, du ser den går negativ når den går positiv, så det må være noe minus der. Og den er jo også minus, så det var det jeg tenkte da. Men jeg vet ikke om det er riktig.» Ut fra dette ser vi tegn til svak relasjonell forståelse for sammenhengen mellom derivasjon og geometri, men han har god relasjonell forståelse for sammenhengen mellom algebra og geometri.

I oppgave 5 kommer vi igjen inn på det at han synes det er vanskelig med forståelse, men at han gode regneferdigheter.

> *T: Det ser ut for meg som du er flink til å regne, god i algebra.*
> *C: Algebra er jeg best i egentlig, i matte.*
> *T: Du synes det er morsomt også kanskje?*
> *C: Ja.*
> *T: Den her oppgavetypen (oppgave 5), hvor den ikke er kontinuerlig.*
> *C: Ja, det er noe av det jeg synes er vanskeligst. Jeg er ikke så flink til å forstå funksjoner ordentlig. Men..*

Selv om han synes det er vanskelig, husket han fra i fjor at funksjonen ikke er kontinuerlig der grafen ikke henger sammen. I oppgave 5b husket han derimot ikke hva som kreves for at den skal være deriverbar, og gav det samme svaret ($x = 0$) som i oppgave 5a. Det ser ut som han har en instrumentell tilnærming til disse oppgavene, men at han har glemt huskeregelen for deriverbarhet.

Nå skal vi se nærmere på oppgave 7 som er en Reasoning-oppgave. Han fikk ikke til oppgaven, og er ikke sikker på hvordan han kunne gi en forklaring:

> *C: Den var jeg veldig usikker på egentlig. Jeg var.. Nei jeg skjønte ikke helt hvordan jeg skulle forklare det, så da..*

T: Nei, vet du hva det vil si.. Eller hvordan vi kan finne ut stigningen til en graf?
C: Ehh … Ja, eller, hvis du deriverer grafen da. Så.. vil du finne.. kunne finne stigningstallet. Ehh, det tenkte jeg ikke på da. Det burde jeg kanskje gjort.

Flinke elever får til «vanlige» regneoppgaver. De får derfor ofte gjort mange oppgaver og får god trening i å løse slike. Oppgavene er som regel stilt opp på samme måte og elevene har lært seg løsningsmetoder som er lure å bruke. Ved andre typer oppgaver, som for eksempel oppgave 7, har de fleste elever ikke sett noen løsning på tidligere, og de blir usikre på hva de skal gjøre. Selv om det kommer fram at Cato vet at man finner stigningen til grafen ved å derivere, prøver han ikke å derivere funksjonen.

I oppgave 9 var vi inne på i delkapittel 4.10 at han tippet mellom A og C. Han har ikke god nok forståelse for den dobbeltderiverte til å kunne resonnere seg fram til rett svar. I stedet for å se på endringen i stigningstallet, begrunnet han svaret med at han trodde funksjonen i svaralternativ A hadde flere ledd. Dette er nok et tegn på liten grad av relasjonell forståelse for sammenhengen mellom derivasjon og geometri.

Jeg fikk inntrykk av at eleven hadde interesse og gode forutsetninger for å få god karakter i matematikk. Med ekstra fokus på forståelse av derivasjon ville han få enda mer glede av faget. Som han selv sier har han «alltid vært ganske god i matte. Så det er noe jeg vil fortsette med og synes er morsomt. Et av de morsomste fagene på skolen.»

Vi skal nå summere opp forståelsesprofilen til Cato. Han har stor grad av ferdigheter i algebra og derivasjon. Men i derivasjon bruker han algebraen for det den er verdt, han har en instrumentell tilnærming, og viser ikke at han har forståelse for hva derivasjon er. Han har lært at man finner stigningstallet til grafen ved å derivere, men bruker ikke dette i oppgave 3 eller oppgave 7. For sammenhengen mellom algebra og geometri viser han at han har relasjonell forståelse siden han kan knytte ulike grafer opp mot n-te gradsuttrykk. Men som vi var inne på i oppgave 8 ser han ikke at 2. koordinaten til ekstrempunktene hans var like, uavhengig om de var maksimums- eller minimumspunkt. Dette trekker ned i relasjonell forståelse for sammenhengen mellom algebra og geometri. Jeg har sammenfattet forståelsen til Cato i tabellen under (Tabell 15).

Tabell 15: Tabell viser hvordan jeg vurderer forståelsesprofilen til Cato.

Komponenter	**Relasjonell forståelse for sammenhengen**	**Ferdigheter knyttet til sammenhengen**
Derivasjon – geometri	Liten	Middels
Derivasjon – algebra	Liten	Stor
Algebra - geometri	Middels	Stor

5.2 Elise

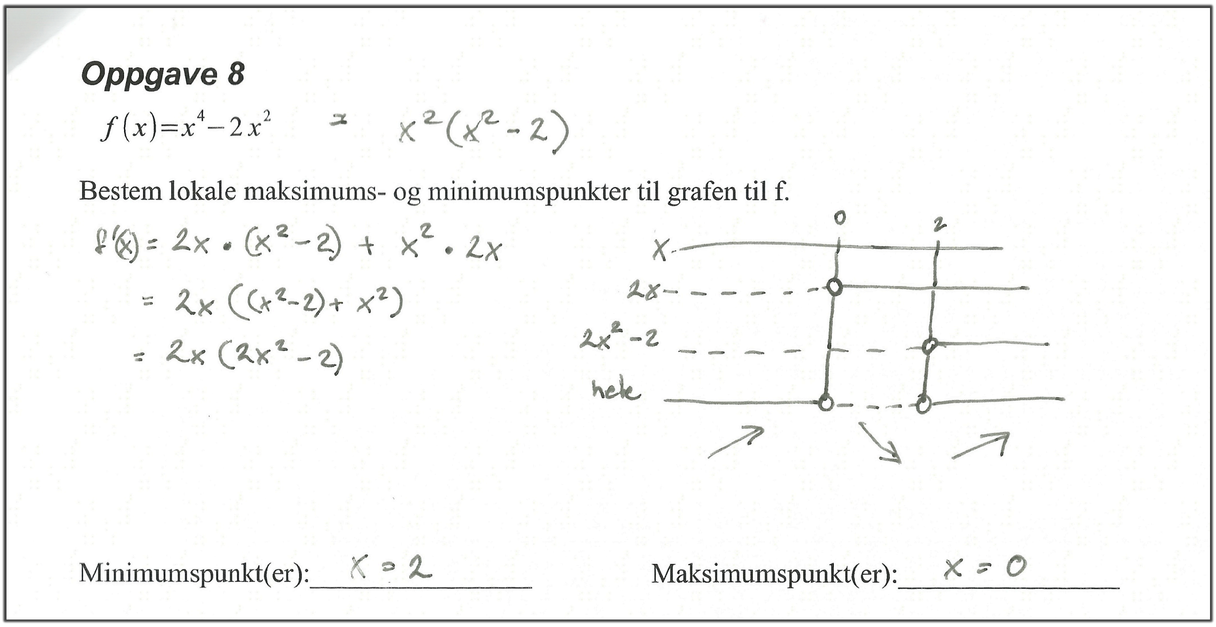
På testen fikk Elise rett svar på oppgave 1, 3, 4, 5a og 5b, og feil svar på oppgave 2, 6, 7, 8 og 9. Selv om hun får feil på flere av oppgavene, skal vi se at hun har god relasjonell forståelse for sammenhengen mellom derivasjon og geometri. Hun sliter derimot med algebraferdigheter. Hun synes blant annet kjerneregelen er vanskelig, men at det er enklere å derivere et «vanlig» polynom. «Ja, det er liksom ikke noe mer… det er ikke noe sånn at man må sette inn u og bytte noen bokstaver og sånn, det er bare å gjøre det liksom. Så det er mye lettere.» Vi ser på flere av svarene i testen at mangel på algebraferdigheter hemmer henne. Hun sier, i intervjuet når vi snakker om oppgave 2, at hun vet hva hun skal gjøre, men at det er vanskelig å derivere kvadratrøtter:

> *T: Hvis du skal derivere en brøk generelt, hva er det du gjør da?*
> *E: Da tar jeg... det enerleddet.. eller først så tar jeg det enerleddet og derivere det og holdet det andre vanlig. Ganger med det vanlige, også tar minus det der igjen også deriverer det andre, det som jeg ikke deriverte i sta. Og delt på det som står, nevneren i andre. Det er sånn vanlig brøkregelen. Men så var det... kvadratroten under som jeg slet litt med.*
> *T: Den deriverte av en kvadratrot er litt..*
> *E: Ja, det er litt verre. Det er liksom den vanlige produksregelen og brøkregelen, den er grei.*

Svaret i oppgave 6 viser også mangelen på ferdigheter i algebra. Oppgaven krever at man faktoriserer nevneren ved hjelp av tredje kvadratsetning og forkorter brøken. For Elise var dette vanskelig. «Jeg hadde ikke peiling, men jeg kan prøve å se hva jeg har gjort. Ehh. Tror jeg bare har fjernet x-ene. Jeg skjønner ikke hvorfor jeg har gjort det. Det virker ikke helt rimelig.»

Som vi var inne på i delkapittel 4.9, er oppgave 8 en oppgave som krever litt regneferdigheter. At man i denne oppgaven skal derivere et fjerdegradspolynom virket litt skummelt for henne. Hun vet hva hun skal gjøre, men må ta en del omveier på grunn av at funksjonen er et fjerdegradsuttrykk. «Det jeg tenkte for å finne maksimums- og minimumspunkter så er det vanlig å derivere, men jeg tenkte det var litt vanskelig med 3. grads… uttrykk, så prøvde jeg å faktorisere den først, hehe, for å gjøre den litt lettere. Og når jeg faktoriserte den så brukte jeg den vanlige produktregelen. Mmm. Også satt jeg inn det svaret jeg fikk i et fortegnsskjema, og fant de verdiene da. Ja.»

Utregninga på oppgaven ser du i Figur 10. For oss som er trent på derivering, ser vi at «forenklingen» hennes ikke er noen forenkling, men hun kommer likevel frem til riktig funksjon. Elise hadde gjort det enklere for seg selv ved å faktorisere ut 2-eren og også brukt konjugatsetningen baklengs. Vi ser her mangelen på grunnleggende algebraferdigheter. På grunn av dette møter hun problemer når hun skal finne løsningene til $f'(x) = 0$. Elise får kun med to x-verdier selv om grafen har tre ekstremalpunkter. Hun vet hva som skal gjøres og setter opp fortegnsskjema med de to x-verdiene hun trodde var korrekt, men det ringer ingen alarmbjelle for at det burde være et ekstremalpunkt til. Det er et tegn på liten relasjonell forståelse for sammenhengen mellom algebra og geometri.



Figur 10: Elises svar på oppgave 8 i testen.

Under intervjuet om oppgave 8 gir hun, selv om utregningen ikke er korrekt, en god forklaring på hvordan vi finner maksimums- og minimumspunkter. Hun sier: «Der den deriverte er positiv så vil den egentlige, eller grafen da, vil stige, og da vet jeg at når den stiger så vil nullpunktet etter må jo være toppunktet. Også ser man at den synker, eller at den deriverte er negativ etterpå… og da må det være et bunnpunkt etter det, siden grafen har sunket fram til det nullpunktet.» Denne forklaringen viser at hun har god relasjonell forståelse for sammenhengen mellom derivasjon og geometri.

I forklaringen på oppgave 3, som er en Reasoning-oppgave, får vi også bekreftet at hun har relasjonell forståelse for sammenhengen mellom derivasjon og geometri. Hun vet at når grafen stiger, så er den deriverte positiv, og når den deriverte er negativ, så avtar grafen:

> *E: Ja, også… Jo, når den grafen der er negativ, så synker tredjegradsfunksjonen. Det var sånn jeg koblet det. Og når den er positiv, så stiger den igjen. Det var sånn jeg fant det ut.*
> *T: Ja. Og den der, og den da?*
> *E: Ehm. Der er den hele tiden negativ. Også er den oppe i bare origo, eller 0 sånn i det vendepunktet der da. Så da fant jeg ut at det må bli et terrassepunkt i stedet for. Liksom, for den der er negativ hele tiden.*

Når hun skulle forklare svaret sitt i oppgave 5b, er hun klar over at en funksjon ikke er deriverbar der grafen har knekkpunkter. Under intervjuet tenke hun litt ekstra på det, og svarte litt usikkert, men også korrekt på hvorfor det er slik: «Jeg vet ikke om det er vanskelig å finne noen tangent i det punktet. Jeg vet ikke jeg… Jeg vet bare at den ikke er deriverbar i de punktene jeg. Hehe.» Vi ser her at selv om hun løser oppgaven uten å tenke nøye gjennom det, klarer hun å få fram hvorfor det er slik når jeg spør henne.

Oppgave 7 som er en Reasoning-oppgave, var hun veldig nærme, men fikk den ikke helt til. Vi så fra svaret hennes på oppgaven i delkapittel 4.8 at hun synes oppgaven var lett bare hun fikk et lite hint om verdiene til sinusverdiene. Hun viser i svaret på testen klar forståelse av at for å finne stigningen til en graf, må hun derivere, men hun deriverte ikke riktig.

I den siste oppgaven kommer det likevel fram noe som er vanskelig å forstå for Elise, nemlig den dobbeltderiverte. På oppgave 9 resonnerer hun seg riktig frem til at det må enten være svaralternativ A eller C. Men kriteriet $f''(5) < 0$ klarer hun ikke å bruke: «Vendepunktet er jo. Vendepunktet er lik 0, men jeg vet ikke hva forskjellen er hvis det er.. altså, vende... Hvis det er mindre enn 0, hva det har å si. I forhold til å si hvis den er mer enn 0. Jeg vet ikke hva slags informasjon det gir meg.» Hun har lært at vi får et vendepunkt der den dobbeltderiverte er null, på samme måte som vi får stasjonære punkter der den deriverte er null. Men i motsetning til den deriverte vet ikke Elise hva det betyr når den dobbeltderiverte er positiv eller negativ. Siden hun forstår den deriverte så godt, ville jeg trodd at hun også kunne bruke dette på den dobbeltderiverte, men det er noe hun ikke har laget noe kognitivt skjema for det i kunnskapen sin.

Oppsummert er Elise er en elev som skriver pent og har god orden i skriftlige svar på testen. Hun har god relasjonell forståelse for sammenhengen mellom derivasjon og geometri og sammenhengen mellom derivasjon og algebra. Selv om hun har god relasjonell forståelse, ser vi klare tegn på at hun blir hemmet av manglende algebraferdigheter. Hun klarer å derivere helt enkle funksjoner, men så snart de er litt mer kompliserte, blir det vanskelig. Elises relasjonelle forståelse for sammenhengen mellom algebra og geometri er liten. Se Tabell 16 for oversikt av forståelsesprofilen til Elise.

Tabell 16: Tabell viser hvordan jeg vurderer forståelsesprofilen til Elise.

Komponenter	**Relasjonell forståelse for sammenhengen**	**Ferdigheter knyttet til sammenhengen**
Derivasjon – geometri	Stor	Stor
Derivasjon – algebra	Stor	Middels
Algebra - geometri	Liten	Liten

5.3 Simen

Simen fikk rett på de tre første oppgavene, og feil svar på de syv siste. Han har liten grad av relasjonell forståelse, men klarer seg greit på grunn av gode regneferdigheter.

På rene regneoppgaver klarer han seg greit. I oppgave 2 og 4, som er derivasjon av brøk, får han det til i oppgave 2, mens det er en liten «slurvefeil» i oppgave 4. Der skal han derivere $3x + 2$ og skriver $3x$ i stedet for 3. Når jeg sier til han at det er en liten feil i oppgaven, svarer han: «Jeg ser ikke helt... Jo, $3x$ har jeg ikke derivert, det skulle ha vært borte en x.»

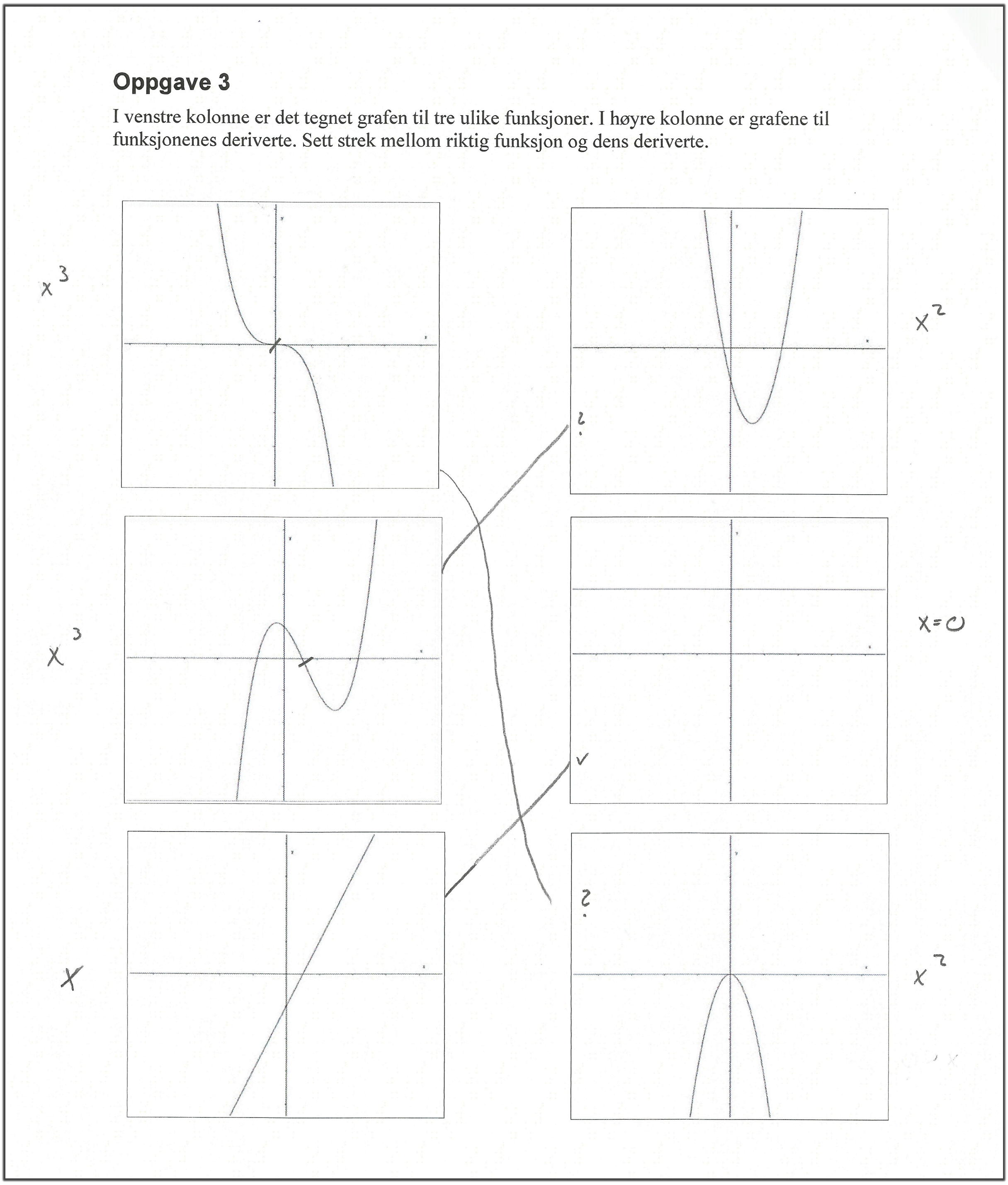
I oppgave 6 klarer han ikke å regne seg frem til riktig svar, men prøver å sette inn en x-verdi nærme 1. Her virker det som han har skjønt at en grenseverdi er å se hva funksjonsverdien går mot når x-verdien nærmer seg grensen. De hadde ikke kalkulator tilgjengelig, så han fikk ikke sjekket ut hva svaret hans ble.

Når han deriverer et førstegradsuttrykk, vet han at han får en konstant. Dette har han helt sikkert regnet mange ganger tidligere. Og i oppgave 3, som er en Reasoning-oppgave, bruker han dette. For de to andre koblingene prøver han å komme på en huskeregler for å løse oppgaven.

> *T: Men her (oppgave 3) sa du at du at det var litt tipping. Kan du si meg hva du tenkte først når du så den oppgaven?*
> *S: Denne (den lineære grafen) var ganske grei.*
> *T: På grunn av at?*
> *S: Når du deriverer en x, så blir det jo 1. Men disse.. mmm. Om den blir sur eller blid, det var jo fra i fjor, så det husket jeg ikke helt. Hva som avgjør hvilken vei den gikk.*
> *T: Skjønner. Kan du tenke litt ... på hva den deriverte betyr? Eller hva finner man ut når man deriverer?*
> *S: Tangenten i toppunktet da? Nei... Først når man deriverer så er det vel.. tangent i toppunkt og bunnpunkt. Nei det er ikke..*
> *T: Jeg bare spør jeg.. Hvorfor henger den sammen med den?*
> *S: Stigningstallet blir borte da.*
> *T: Stigningstallet blir borte?*
> *S: Ja.*
> *T: Så da får du bare en konstant strek bortover? Men ja, så du viste ikke hvem som var sur og blid?*

Vi ser at Simen ikke har forståelse for hva derivasjon er. I oppgaveløsning tenker han i stedet på hva derivasjon gjør. Han blander sammen ord og utrykk han har lært. Han har sikkert lært at man skal derivere og sette den deriverte lik 0 for å finne toppunkter og bunnpunkter, for i de punktene har tangenten stigningstall 0. Men for Simen er dette blitt stokket om, han sier: «når man deriverer så er det vel.. tangent i toppunkt og bunnpunkt.» Han prøver å forklare ved en regel de hadde lært i fjor. Huskeregelen er at når den dobbeltderiverte er positiv, så ser grafen til f ut som en blid munn (konveks), og når den dobbeltderiverte er negativ, så er grafen til f sur (konkav). Han får ikke brukt dette i denne oppgaven, men tipper likevel riktig på oppgaven.

I figuren under er Simens svar på oppgave 3, se Figur 11. Han har skrevet i margen at de to første grafene er av tredje grad, mens den siste er av første grad. Så ser han at grafene til de deriverte av funksjonene er to som er av andre grad og en nulte grad. Simen viser tegn til relasjonell forståelse for sammenhengen mellom algebra og geometri. Vi legger merke til de to spørsmålstegnene som viser at han ikke er sikker på hvem som hører til hvem, men at han har tegnet inn to streker hvor $f(x) = 0$ på de to tredjegradsfunksjonene. Så han koblet de sammen ut i fra det.

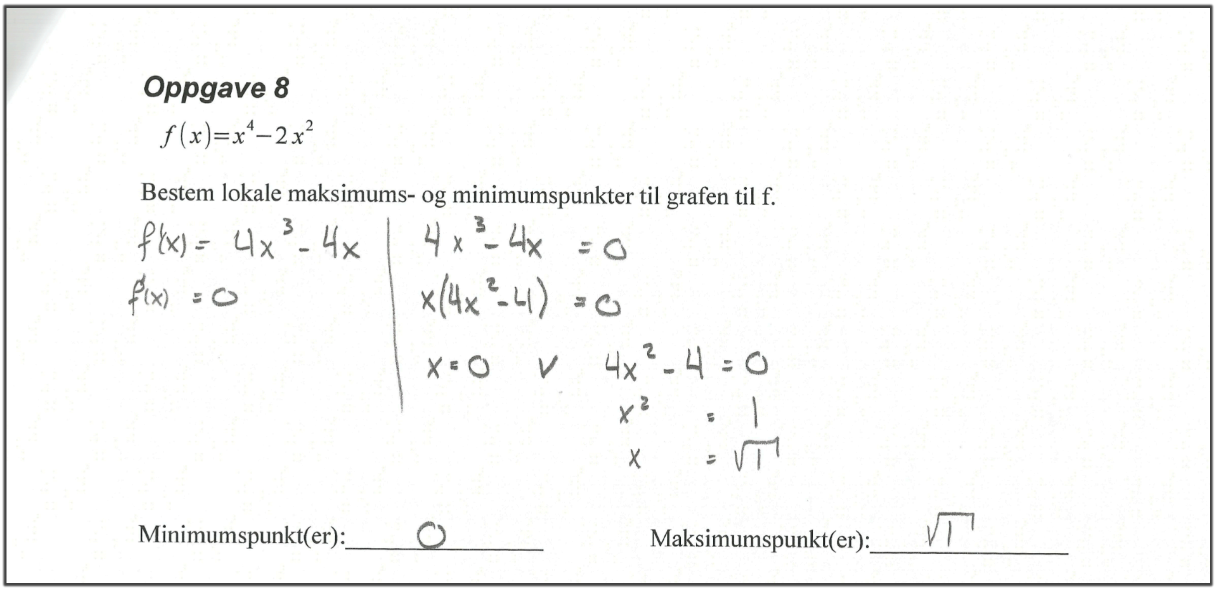


Figur 11: Simens svar på oppgave 3.

I oppgave 5 svarer Simen at funksjonen ikke er kontinuerlig for x mellom 0 og 2. Vi ser at grafen gjør et hopp i $x = 0$ fra 0 til 2, men det er y-verdiene. Han blander sammen x- og y-verdier. Etter litt prat sier han: «da er det fra… 0 til 0. Ja, jeg vet ikke helt, 0 til 2 er jo opp dit. Så jeg vet ikke helt hva jeg har tenkt, det er jo 0 til 0 ser jeg nå. Ikke sammenhengende.» Vi ser her tegn på at han sliter med forståelsen av geometri.

Fra oppgave 8 kommer det også tydelig fram at han ikke har relasjonell forståelse av den deriverte. Han har en instrumentell tilnærming til oppgaveløsningen og lærer seg fremgangsmåter, men vet ikke hvorfor han gjør det han gjør.

> *S: Ehh… maks og min, det må være toppunkt og bunnpunkt i alle fall, og for å finne toppunkt og bunnpunkt så… derivere… Så sette den deriverte lik null, jeg vet ikke helt… hva man finner da…. Jo for det er jo. …*
> *T: Man setter den deriverte lik null, det er riktig det.*
> *S: Det er det, ja.*
> *T: Men kan du.. Er det noe du har lært?*
> *S: Det er bare noe jeg har lært og sett i boka. Det er en sånn oppskrift. Hvis en skal finne nullpunkt så setter man f x lik 0, og når man skal finne toppunkt og bunnpunkt så er det den deriverte lik null. Så det er ikke noe mer enn det tror jeg.*



Oppgave 8

$f(x)=x^4-2x^2$

Bestem lokale maksimums- og minimumspunkter til grafen til f.

$f(x) = 4x^3 - 4x$

$f(x) = 0$

$4x^3 - 4x = 0$

$x(4x^2 - 4) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad 4x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \sqrt{1}$

Minimumspunkt(er): 0 Maksimumspunkt(er): $\sqrt{1}$

Figur 12: Simens svar på oppgave 8 i testen.

Fra figuren over (Figur 12) ser vi at han deriverer og setter den deriverte lik 0. Han gjør dette oversiktlig og fint, og faktoriserer ut en x som er felles faktor (han kunne også ha faktorisert ut fireren). Algebraen går fint til å begynne med, men han mister løsningen $x = -1$ når han skal løse $x^2 = 1$. Det er spennende å se at han fortsetter å skrive $\sqrt{1}$ videre i oppgaven, i stedet for 1. Når han er ferdig med å finne x-verdiene for de stasjonære punktene setter Simen den største x-verdien som maksimumspunktet og den minste som minimumspunktet. Han har altså ikke sjekket hvilken av de to x-verdiene som gir størst funksjonsverdi, og forstår ikke hva han skal gjøre. Hvis man prøver å skape forståelse for hva man gjør og reflekterer rundt dette, er det større sjanse for å huske dette lenger (se delkapittel 2.2), i forhold til å pugge en fremgangsmåte som lettere kan glemmes.

Et annen spennende funn med Simen er at han sier «f x» og ikke «f av x». Når elever blir undervist i funksjoner, blir de opplært at $f(x)$ uttales «f av x», selv om det ikke skrives på den måten. Han har ikke utviklet indre tale. Simen viser heller ikke, i forklaringen på oppgave 7, at han har forståelse av vendepunkt: «Så er det en cosinus funksjon da som har en periode på 2pi, så må den være lik hele veien. Så da vil et vendepunkt og et toppunkt kanskje være det samme da..?»

Hvis vi skal oppsummere forståelsen til Simen har han ok algebra og regneferdigheter. Han får til flere av de rene regneoppgavene, men viser blant annet i oppgave 8 at han ikke har helt kontroll på faktorisering. I derivasjon ser vi helt klare tegn på instrumentell forståelse. Han har bare lært hva han skal gjøre, men vet ikke hvorfor det er slik. Han forstår heller ikke at vi finner stigningstallet til grafen når vi deriverer. Simen viser middels grad av relasjonell forståelse for sammenhengen mellom algebra og geometri. Han blander sammen hva som er x-verdier og y-verdier, men klarer å gjenkjenne hvordan funksjoner av ulik grad ser ut.

Tabell 17: Tabell viser hvordan jeg vurderer forståelsesprofilen til Simen.

Komponenter	**Relasjonell forståelse for sammenhengen**	**Ferdigheter knyttet til sammenhengen**
Derivasjon – geometri	Liten	Liten
Derivasjon – algebra	Liten	Middels
Algebra - geometri	Middels	Middels

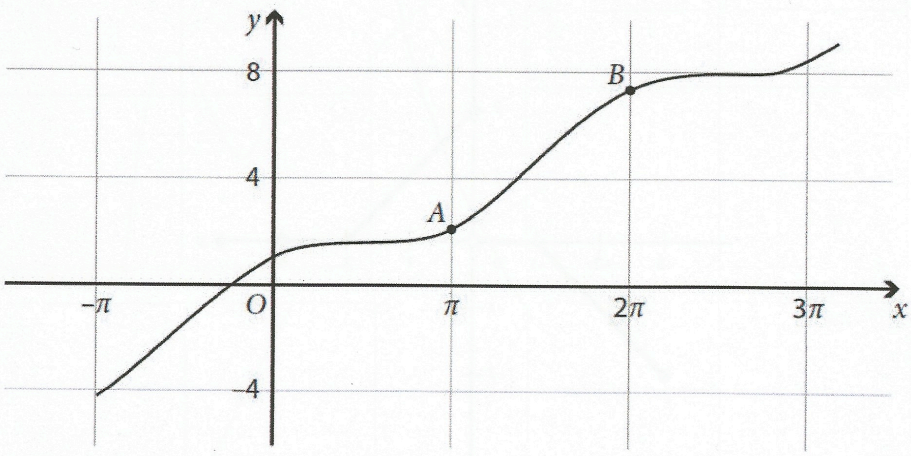
5.4 Mari og Anna

Jeg har valgt å gå grundigere inn i de tre foregående elevene. Mari og Anna vil jeg ta for meg mindre omfattende her.

Mari er en faglig sterk elev. Hun fikk alt rett på testen bortsett fra oppgave 2. Jeg ønsket å invitere henne til intervju siden hun hadde så bra skår på testen, og ville se om hun hadde forståelse for det hun gjorde. Da hun kom inn til intervju, var noe av det første hun sa at hun visste at hun hadde svart feil på oppgave 2, og at det er svaralternativ D som er rett. Mari er en beskjeden person, og uttrykker ofte at hun ikke er helt sikker på svaret på oppgavene. Hun sier at hun liker regneoppgaver best, og at det er vanskeligere med forklaringsoppgaver. Likevel forklarer hun godt, og viser relasjonell forståelse i alle komponentene som jeg har tatt med i denne delen, og stor grad av ferdigheter. Hun fikk toppkarakter i faget halvveis i skoleåret.

Anna fikk rett på oppgave 1, 3, 4, 5a og 6. Hun har gode regneferdigheter og vet godt hva hun skal gjøre på standard regneoppgaver. Hun er ganske lik Simen i sin forståelsesprofil. Som Simen vet hun ikke hvorfor vi setter den deriverte av en funksjon lik 0 for å finne ekstremalpunkter. Og hun har vanskelig for å resonnere seg frem til rett svar på Reasoning-oppgavene. Forskjellen mellom forståelsesprofilene til Simen og Anna, er at Anna har lav relasjonell forståelse for sammenhengen mellom algebra og geometri. Som vi ser fra svaret hennes i oppgave 7, se Figur 13 under, tror hun funksjonen i oppgaven er på formen $y = ax + b$, som impliserer at $\cos x$ må være en konstant. Dette stemmer absolutt ikke. Samtidig ser vi at hun skriver at «grafen har samme stigningstall hele tiden». Vi ser av grafen at dette ikke *kan* være korrekt. Anna får i likhet med Simen god karakter i faget, og ligger mellom karakterene 4 og 5.

Oppgave 7



Sofia studerer grafen til funksjonen $y = x + \cos x$ vist ovenfor. Hun sier at grafen har samme stigningstall i punkt A og i punkt B. Forklar hvorfor hun har rett.

$y = 1x + \cos x \quad = \quad y = ax + b$

stigningstall.

Grafen har samme stigningstall hele tiden.
Stigningstallet er 1.

Figur 13: Annas svar på oppgave 7.

5.5 Hovedfunn

I denne delen av oppgaven skal jeg presentere de tre hovedfunnene i denne studien. Disse funnen er relatert til forståelsesprofilene jeg fant hos elevene. Det første funnet representerer elever som forstår matematikken, men som blir satt tilbake av mangel på algebraferdigheter. Det andre funnet jeg vil presentere, er at det finnes to helt ulike forståelsesprofiler som ligger nær hverandre i karakterer i R2. Og det siste funnet er at elevene i testen sliter med å uttrykke seg muntlig når de snakker om matematikk.

5.5.1 Algebraferdigheter

Det første funnet som jeg vil presentere, indikerer mangel på grunnleggende algebraferdigheter hos norske elever. Jeg vil trekke frem Elise. Hun er en flink elev, skriver pent og forklarer matematikken på en forståelig og korrekt måte, men sliter med enkelte oppgaver fordi det er en del algebra som er vanskelig for henne. Jeg vil igjen ta for meg hennes svar på oppgave 8 i testen (se delkapittel 5.2). Hun vet godt hva hun skal gjøre for å løse oppgaven. Hun må derivere funksjonen og sette den deriverte lik 0, fordi «stigningstallet til den egentlige grafen er jo 0 i topp og bunnpunktene. Og da må det jo være et nullpunkt til den deriverte.» Hun er godt kjent med fortegnsskjema og vet hvordan man bruker det, ved at grafen til funksjonen vokser når den deriverte er positiv og synker når den deriverte er negativ. Det som gjør oppgaven vanskelig for henne, er at det er en fjerdegradsfunksjon som «ser skummel» ut, og at hun sliter med faktorisering. Svaret hun får, med to ekstrempunkter, vil være typisk for en tredjegradsfunksjon. Hun er ikke bevisst at en fjerdegradsfunksjon kan ha 3 ekstremalpunkter.

Andre studier viser at norske elever sliter med algebra. Fra blant annet Grønmo et al. (2012, s. 39) leser vi: «Særlig de svake resultatene i algebra på 8. trinn gir grunn til bekymring.» Elise er et eksempel som bekrefter dette, og er en elev lider av svake algebraferdigheter. Med god opplæring i algebra ville hun vært en elev som ville ha karakteren 6 innen rekkevidde. Det blir fristende å trekke analogien til et menneske som er glad i vannet, men som aldri har fått opplæring i svømming. Vi må lære barna våre algebra, slik at de kan få glede av matematikken i fullt monn.

5.5.2 Forskjellige forståelsesprofiler

Vi har tidligere i dette kapitlet sett nærmere på tre ulike forståelsesprofiler. Blant de intervjuede elevene har vi en elev, Elise, som har relasjonell forståelse. På den andre siden har vi Simen som har instrumentell forståelse i derivasjon.

Forståelsesprofilene til Elise og Simen er illustrert i henholdsvis Tabell 16 og Tabell 17. Vi ser fra tabellene at Elise har stor grad av relasjonell forståelse for sammenhengen mellom derivasjon og geometri og stor grad av relasjonell forståelse for sammenhengen mellom derivasjon og algebra, mens Simen viser liten grad av relasjonell forståelse. Når det gjelder relasjonell forståelse for sammenhengen mellom algebra og geometri har Simen middels grad av relasjonell forståelse og Elise viser liten grad av relasjonell forståelse.

Simen er en elev som har trent seg opp til å bli ganske god i algebra, og viste gode regneferdigheter i de fire første oppgavene. I derivasjonsoppgaver har han også lært seg hvordan han skal gå frem for å løse ulike standard oppgaver. Som han sier: «Det er bare noe jeg har lært og sett i boka. En sånn oppskrift.» Han gir ikke uttrykk for at han forstår hva derivasjon er for noe. På tross av dette får han til mange oppgaver. Ved spørsmål på hva som er viktig å øve på i matematikk, svarer han eksamensoppgaver. Han har, slik jeg ser det, mer fokus på å kunne løse oppgaver enn å forstå matematikken bak. Han ligger an til å få karakteren 4 i Matematikk R2.

Elise på sin side forstår godt hva derivasjon går ut på, og viser dette gjennom gode resonnement på noen av oppgavene. Det hun sliter med, som vi har vært inne på tidligere, er algebra. På noen oppgaver stopper det opp for henne på grunn av at utregningen blir vanskelig, selv om hun vet og forstår hva hun skal gjøre. Dette gjør at hun ikke når helt opp på karakterskalaen. Hun har ligget mellom 4 og 5, og er nå nærmest karakteren 5.

Vi ser her to ulike forståelsesprofiler. Elise viser større grad av relasjonell forståelse, mens Simen har bedre regneferdigheter og instrumentell forståelse. Elise fikk til en mer oppgave enn Simen, og får en karakter høyere i Matematikk R2. Jeg mener det er et tankekors at det ikke skiller mer enn én karakter med tanke på den store forskjellen i relasjonell forståelse. Slik jeg tolker eksamensveiledningen fra Utdanningsdirektoratet (2015a), vil en elev med instrumentell forståelse i matematikk ikke ha mulighet for høy måloppnåelse i faget. Karakteren bestemmes mye (kanskje mest?) ut fra hvor flink en elev er til å løse oppgaver, og ikke forstår oppgaver. Så det kan virke som man kan pugge seg til en god karakter i matematikk. Matematikk kan for mange bli et kjedelig fag hvor man bare må lære seg ulike regler i forskjellige adskilte kapitler. Jeg tror hvis man får øynene opp og ser hvordan de ulike delene av matematikken henger sammen, vil det gjøre faget mye mer spennende og gi mer motiverte elever. Spesielt i realfagsmatematikken, hvor vi finner de flinkeste matematikkelevene, bør det legges til rette for å øke forståelsen av matematikken.

Som lærer har vi ansvar for å tilpasse undervisningen til hver enkelt elev, jfr. opplæringsloven §1-3 (Lovdata, 2015). Å være lærer kan sammenliknes med å være lege, vi må sette riktig diagnose på våre elever. Da er det viktig at vi tidlig finner ut hva elevene får til og hva de synes er vanskelig. Er det en elev med forståelsesprofil som Elise, vil det være viktig å hjelpe henne med algebra. Elever som likner Simens forståelsesprofil, vil ha stor nytte av å få være med i diskusjon om hvordan vi kan løse ulike problemer.

5.5.3 Muntlig aktivitet

I denne mastergradsoppgaven har jeg også flere funn på elever som sliter med å kommunisere presist i matematikk. I intervjusituasjonen ble elevene «tvunget» til å snakke om oppgavene. Mange elever synes det er vanskelig å formulere seg matematisk, både skriftlig og muntlig. Som Mari sier: «Jeg synes det er ganske vanskelig når jeg skal skrive eller forklare ting og sånn med ord. Da blir det litt sånn.. jeg liker det ikke så godt.»

Jeg vil ta fram noen eksempler fra intervjuene. Simen ville sette ord på at den deriverte av en førstegradsfunksjon er en konstant funksjon. Han uttrykker dette slik: «Når du deriverer en x, så blir det jo 1.» Det er riktig at den deriverte av x er 1, men sett i konteksten av oppgave 3 blir ikke dette en god formulering. Grafen han referer til, inneholder også et konstantledd, og stigningstallet er ikke 1. Anna vil også uttrykke at den deriverte av en lineær funksjon blir en konstant funksjon. I stedet for å si konstant funksjon, sier hun: «Så den må bli flat, mener jeg.»

Vi var også inne på i delkapittel 5.3 at Simen sa «f x» og ikke «f av x». Han sier det som står skrevet og ikke det som ligger i teksten. Språket blir mye vektlagt i et sosiokulturelt læringssyn. At vi har utviklet en indre tale, gjør oss bevisste og gir muligheten til å reflektere. Simen har ikke fått utviklet sin indre tale når det gjelder funksjoner i matematikken.

I intervjuet med Elise spør jeg om hun kan forklare hvordan man deriverer en brøk. I stedet for å si: «Den deriverte av teller multiplisert med nevner, minus teller multiplisert med den deriverte av nevner, over nevner i andre», begynner hun slik: «Først så tar jeg det enerleddet og derivere det og holdet det andre vanlig…» Man forstår hva hun mener, men likevel er det ikke helt «etter boka». I en muntlig eksamens situasjon vil det å uttrykke seg presist og korrekt kunne utgjøre forskjell på hvilken karakter man får.

En kontinuerlig funksjon kan være konstant, vokse eller avta. Når Cato skal forklare hvordan han tenkte da han skulle koble grafer i oppgave 3, brukte han i stedet termene positiv og negativ. «Ja altså, du ser den går negativ når den går positiv, så det må være noe minus der. Og den er jo også minus.» Igjen skjønner vi at han mener avta når han sier negativ, og vokser når han sier positiv. Likevel blir ikke dette riktig bruk av positiv og negativ. Cato sier også når han skal faktorisere at: «… da står jeg igjen med x i andre minus 1, som jeg kan… Det er vel 2. konjugatsetning eller noe sånt noe, som sier at x i andre minus 1 blir x pluss 1 ganger x minus 1.» Han har helt riktig at $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, men det er nok ingen andre som har hørt om 2. konjugatsetning før.

At elever synes det er vanskelig å uttrykke seg matematisk, er kanskje ikke så rart. Dette gjenspeiler hvilke arbeids- og undervisningsformer som blir vektlagt i norsk skole, hvor liten tid av undervisningen blir brukt til muntlig aktivitet (Grønmo, et al, 2010, s. 151). Jeg tror vi trenger mer fokus på muntlig aktivitet. Å snakke om noe man ikke forstår er vanskelig, og elevene vil med trening i muntlig aktivitet bli mer klar over hva de ikke forstår. Og når man forstår noe, reflekterer og snakker over det, så blir det større langtidslæring (se delkapittel 2.2). Vi trenger mer fokus på å snakke og diskutere matematikk i opplæringen.

5.6 Oppsummering

I denne mastergradsoppgaven har jeg hatt fokus på elevers forståelse av derivasjon. Det var 28 elever som svarte på en test med 10 forskjellige oppgaver. Disse oppgavene er delt inn i tre kategorier, Knowing, Applying og Reasoning. Vi så klare tendenser på at forklaringsoppgaver faller vanskeligere ut enn rene regneoppgaver. Det var lavest skår på de tre siste oppgavene, og av de oppgavene var to i Reasoning- og en Applying-kategorien. I intervjuene med fem elever fikk jeg et godt innblikk i elevenes verden og tankeprosesser. Der fant jeg ut at det var en elev som strevde med algebra, men som hadde forståelse for matematikken. Og to elever som ikke har forståelse for derivasjon, men som likevel klarer å løse oppgavene fordi de har lært seg fremgangsmåten, såkalt instrumentell forståelse. Jeg så også flere tegn på at elevene hadde vanskeligheter for å formulere seg muntlig når de snakker om matematikk. Svarene på forskningsspørsmålene er derfor at det finnes elever med ulike forståelsesprofiler i derivasjon. Og at man kan få god karakter i matematikk R2 uten relasjonell forståelse av derivasjon, men med instrumentell forståelse.

Ut fra funnene i studien er det viktig at vi som lærere diagnostiserer våre elever og hjelper de med de ulike utfordringene de har. Jeg tror også det er viktig for motivasjonen til elever at det legges mer vekt på forståelse i undervisning, selv om man kan få til eksamensoppgaver og få god karakter ved å pugge fremgangsmåter på ulike oppgaver. Mer diskusjon og muntlig aktivitet i timer kan også være med på å hjelpe elevene i deres læring i matematikkfaget (Grønmo, et al, 2010), og gi økt langtidslæring.

Denne mastergradsoppgaven kan brukes som utgangspunkt for ny forskning, det ville vært spennende med en stor-skala kvalitativ studie om elevers forståelse av derivasjon. Oppgaven kan også være grunnlag for diskusjoner av undervisningen som foregår. Vi er alle interessert i, og har et ønske om at norske elever skal få et godt møte med matematikkfaget, og vi som lærere er med på å åpne døren inn matematikkverdenen.

Litteraturliste

Birks, D. (1987) *Reflection: A Diagnostic Teaching Experiment*. Master of Education thesis. University of Nottingham.

Cohen. L, Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education (7th ed.)*. New York: Routledge

Dalen, M. (2004). *Intervju som forskningsmetode: en kvalitativ tilnærming*. Oslo: Universitetsforlaget.

Garden, R., Lie, S., Robitaille, D. F., Angell, C., Martin, M. O., Mullis, I. V. S., Foy, P. & Arora, A. (2006). *TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks.* Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center

Goldin, G. (2000). «A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research», i Kelly, A. & Lesh, R. *Handbook of Reasearch Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Grønmo, L. S., Onstad, T. & Pedersen, I. F. (2010). *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced 2008 i videregående skole.* Oslo: Unipub.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2012). *Fremgang, men langt fram. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011.* Oslo: Akademika forlag.

Houssart, J. & Evans, H. (2011). «Conducting Task-Based Interviews with Pairs of Children: Consesus, Conflict, Knowledge, Construction and Turn», i *International Journal of Research & Method in Education* 34(1): 63.

Imsen, G. (2008). *Elevens verden: Innføring i pedagogisk psykologi*. Oslo: Tano Aschehoug.

Johannessen, A., Tufte, P. A., & Christoffersen, L. (2010). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode*. Oslo: Abstrakt.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Lovdata. (2015). *Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa (opplæringslova)*. Hentet 14.04.15 fra: https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61/KAPITTEL_1#KAPITTEL_1

Lyngsnes, K. & Rismark, M. (1999). *Didaktisk arbeid*. Oslo: Gyldendal akademisk

Leiren B. & Ludvigsen S. (2005). *Derivasjon i norsk skole – en komparativ studie av norske og finske elever*. Trondheim: NTNU.

Maxwell, J. (2013). Qualitative research design, an interactive approach. Los Angeles: Sage.

Melbye, P. E. (1995). *Matematikkvansker*. Oslo: Universitetsforlaget.

Nortvedt, G. (2013). «Matematikk i PISA – matematikkdidaktiske perspektiver», i Kjærnsli, M. & Olsen, R.V. *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Oslo: Universitetsforlaget.

OECD. (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing.

Onwuegbuzie, A. & Leech, N. (2007). «Validity and Qualitative Research: An Oxymoron?», i *Quality and Quantity* 41(2): 233-249.

Silverman, D. (2006). Interpreting Qualitative Data. Methods for Analysing Talk, Text and Interaction. London: Sage.

Skemp, R., (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). «Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity», i *Educational Studies in Mathematics* 12(2): 151-169.

TIMSS Advanced. (2015). Hjemmesiden til TIMSS Advanced i Norge. Hentet 05.01.15 fra: http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/timss-advanced/index.html

TIMSS Advanced. (2015a). Frigitte oppgaver fra TIMSS Advanced. Hentet 05.01.15 fra: http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/timss-advanced/frigitte-oppgaver/index.html

Utdanningsdirektoratet. (2015). *Læreplan i matematikk for realfag – programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram.* Hentet 12.01.15 fra: http://www.udir.no/kl06/MAT3-01/Hele/Kompetansemaal/Matematikk-R2/

Utdanningsdirektoratet. (2015a). *Eksamensveiledninger for videregående.* Hentet 11.03.15 fra: https://dok.udir.no/DokumenterAndrekataloger.aspx?proveType=EV

Vedlegg / Appendiks

Vedlegg 1 – NSD prosjektnummer 41547

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

NSD

Harald Hårfagres gate 29
N-5007 Bergen
Norway
Tel: +47-55 58 21 17
Fax: +47-55 58 96 50
nsd@nsd.uib.no
www.nsd.uib.no
Org.nr. 985 321 884

Arne Hole
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning Universitetet i Oslo
Postboks 1099 Blindern
0317 OSLO

Vår dato: 20.01.2015 Vår ref: 41547 / 3 / SSA Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 11.01.2015. Meldingen gjelder prosjektet:

41547	*Forstår elevene derivasjon?*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Oslo, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Arne Hole*
Student	*Torstein Hermansen*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 30.05.2015, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Vigdis Namtvedt Kvalheim

Sondre S. Arnesen

Kontaktperson: Sondre S. Arnesen tlf: 55 58 33 48
Vedlegg: Prosjektvurdering

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

Avdelingskontorer / *District Offices*:
OSLO: NSD. Universitetet i Oslo, Postboks 1055 Blindern, 0316 Oslo. Tel: +47-22 85 52 11. nsd@uio.no
TRONDHEIM: NSD. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim. Tel: +47-73 59 19 07. kyrre.svarva@svt.ntnu.no
TROMSØ: NSD. SVF, Universitetet i Tromsø, 9037 Tromsø. Tel: +47-77 64 43 36. nsdmaa@sv.uit.no

Test i forbindelse med masteroppgave

Navn(elevnummer):__________

Prøvetid: 45 min

Oppgave 1

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 5$

Hva er $f'(x)$?

Oppgave 2

Den deriverte av $\frac{4}{\sqrt{3x-4}}$ er

A) $12\sqrt{3x-4}$

B) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

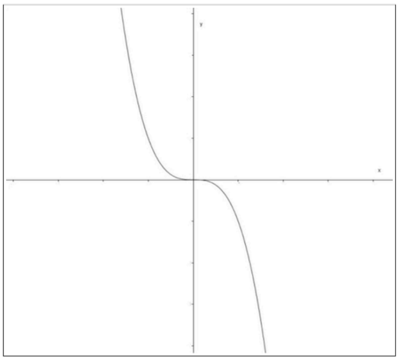
C) $\frac{-2}{(3x-4)^{\frac{3}{2}}}$

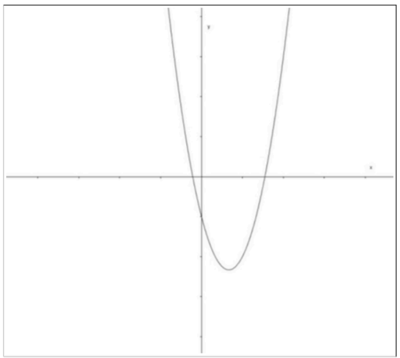
D) $\frac{-6}{(3x-4)^{\frac{3}{2}}}$

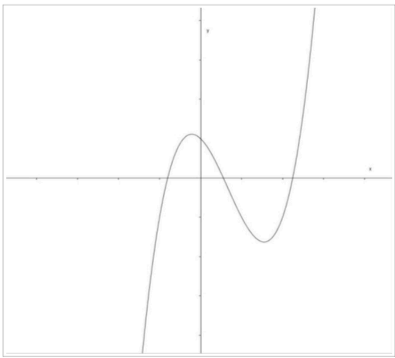
E) $6\sqrt{3x-4}$

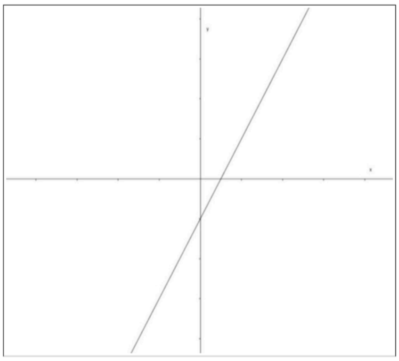
Oppgave 3

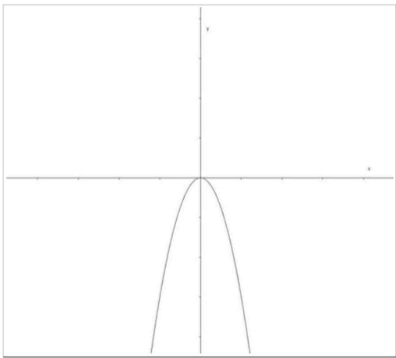
I venstre kolonne er det tegnet grafen til tre ulike funksjoner. I høyre kolonne er grafene til funksjonenes deriverte. Sett strek mellom riktig funksjon og dens deriverte.









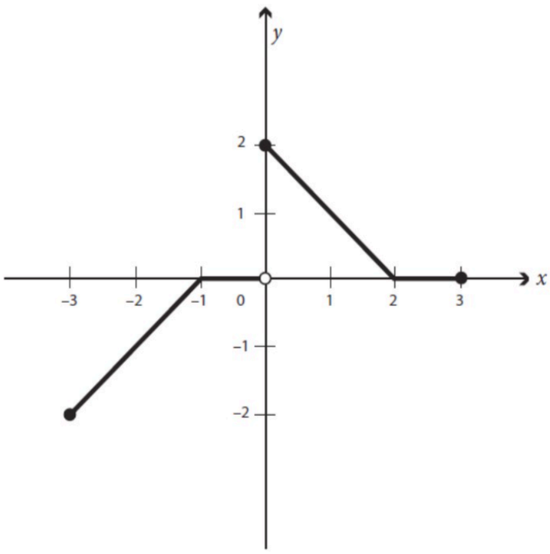


Oppgave 4

Finn $f'(x)$ når $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}$

Oppgave 5

Funksjonen $y=f(x)$, $-3\leq x\leq 3$ er definert ved følgende graf:



A) For hvilke x-verdier i intervallet $-3\leq x\leq 3$ er funksjonen f IKKE kontinuerlig?

____

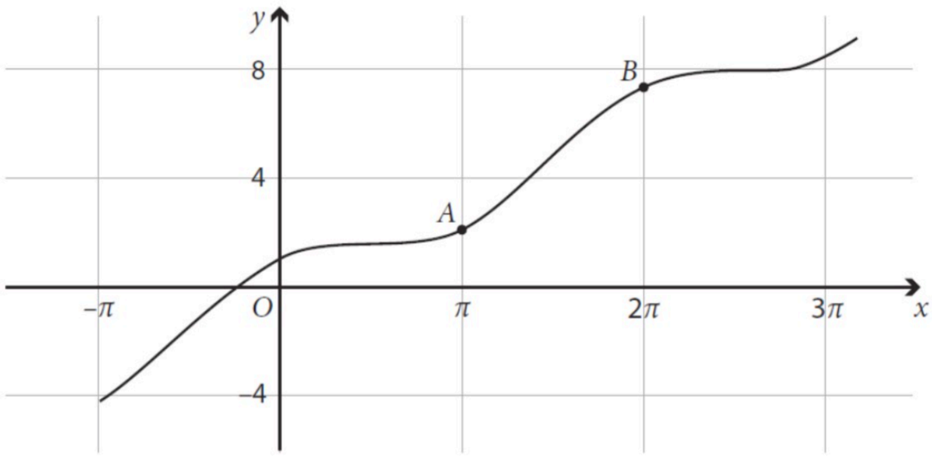
B) For hvilke x-verdier i intervallet $-3<x<3$ er funksjonen f IKKE deriverbar?

____

Oppgave 6

Bestem $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+2)(x-1)}{x^2-1}$.

Oppgave 7



Sofia studerer grafen til funksjonen $y = x + \cos x$ vist ovenfor. Hun sier at grafen har samme stigningstall i punkt A og i punkt B. Forklar hvorfor hun har rett.

Oppgave 8

$f(x) = x^4 - 2x^2$

Bestem lokale minimum- og maksimumspunkter til grafen til f.

Minimumspunkt(er):________________ Maksimumspunkt(er):________________

Oppgave 9

Hvilken av grafene nedenfor kan ha alle disse egenskapene?

$f(-1) > 0 \quad , \quad f(3) < 0 \quad , \quad f'(5) = 0 \quad , \quad f''(5) < 0$